This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math. 34a

Math. 34a

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000070108

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA PERCUSSION,

PAR

M. OSTROGRADSKY.

Tiré des *Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de Saint-Pétersbourg. Sixième série. Sciences mathématiques et physiques. Tome VI.*

ST.-PÉTERSBOURG.

DE L'IMPRIMERIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

1854.

Se vend chez MM. Eggers et Comp., libraires, Commissionnaires de l'Académie, et à Leipzig, chez M. Léopold Voss.

Prix: 45 Cop. arg. — 15 Ngr.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE GAND

Digitized by Google

Digitized by Google

1. Nous allons rappeler d'abord les équations générales du mouvement que nous avons données dans le mémoire sur les déplacements instantanés *).

Concevons un système de points matériels, ou d'éléments d'un corps, liés entre eux d'une manière qui doit être définie, et désignons en les masses respectivement par m, m', m'', m''',..... Le mode des liaisons entre ces masses constitue la définition analytique du système, il revient, comme on le sait, à la connaissance des déplacements que le système pourrait recevoir à chaque instant. Il s'agit d'acquérir cette connaissance d'après la nature du système, c'est-à-dire d'après la nature des liaisons qui gènent le mouvement des points m, m', m'', m''',.... Or les liaisons dont il s'agit consisteront toujours en ce que, pendant que le système se déplace, certaines quantités L, L_1, L_2, L_3,...., qui naturellement exprimeront quelques propriétés du système dépendantes de sa position, ne changeront point, ou ne sauraient point diminuer, ou bien encore ne pourront pas augmenter. Comme, par exemple, les fils flexibles et inextensibles qui réuniraient les points du système.

La présence d'une surface qu'un point serait obligé de décrire, reviendrait à l'invariabilité d'une fonction des coordonnées, fonction qui est celle de la surface **), ou à l'impossibilité qu'elle puisse diminuer, selon que le point serait assujetti à demeurer sur la surface, ou seulement à y être contigu.

Il est facile de voir que, pour obtenir les déplacements possibles du système, nous n'avons qu'à exprimer algébriquement les propriétés tout-à-l'heure mentionnées des quantités L, L_1, L_2, L_3... Pour cela, imaginons un système de droites infiniment petites $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,... et du reste tout-à-fait arbitraires, tant en grandeur qu'en direction, pour nous représenter tous les déplacements, que nous pourrons, mentalement et respectivement, attribuer aux masses m, m', m'', m''',... à chaque instant. Ces droites auront donc pour origines les masses mêmes m, m', m'', m''',... et pour extrémités les points où celles-ci se trouveraient après le déplacement, si elles pouvaient en effet recevoir celui qu'on leur attribue seulement par la pensée. Pour se rapporter à

*) Mémoires de l'Académie Impériale, tome III, page 565.

**) Par fonction d'une surface nous entendons cette fonction des coordonnées qui étant égalée à zéro fournirait l'équation de la surface.

Digitized by Google

chaque instant, les quantités $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$ contiendront, d'une manière arbitraire, le temps, que nous désignerons par t, et que nous compterons à partir d'une origine prise convenablement, ou arbitrairement.

Cela posé, considérez le système à la fin d'un temps quelconque t, pour que ce que vous en direz puisse s'appliquer à chaque instant; admettez mentalement que, pendant l'instant dt qui suit le temps t, le système se déplace de manière que ses points m, m', m'', m''',.... parcourent respectivement les espaces $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... dont on vient de parler, et cherchez les changements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,... que les quantités L, L_1 L_2, L_3,.. éprouvent par les déplacements dont il s'agit. Cependant ne perdez pas de vue que ces déplacements ne sont nullement réels, car $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,... représentent tout ce que vous pouvez concevoir, pour le mouvement instantané du système, et par conséquent, non seulement les mouvements possibles, c'est-à-dire ceux que les liaisons ou les obstacles qui gènent le système laissent libres, mais aussi ceux qui sont impossibles à cause de ces mêmes liaisons ou obstacles. Il n'y pas d'autre limitation pour $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon$,... que leur grandeur infiniment petite, afin qu'elles puissent répondre à un élément du temps.

Il n'y a point de méthode générale pour trouver les changements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3....; chaque cas particulier exigeant un procédé qui lui soit propre, mais qui ne demandera que des considérations géométriques le plus souvent fort simples.

2. Supposons, par exemple, qu'à la fin du temps t, le point m se trouve en contact avec une surface impénétrable, et peut s'en détacher, dans cette partie de l'espace où la fonction de la surface est positive. Il s'agit de trouver les déplacements que cette circonstance laisse libres. Appelons μ le point appartenant à la surface correspondante au mobile m, et désignons par $d\mu$ le déplacement effectif de μ pendant l'instant dt. $\Delta\varepsilon$ représentant toujours un déplacement quelconque de m, soit $\Delta\xi$ la droite réunissant les extrémités de $d\mu$ et de $\Delta\varepsilon$; cette droite $\Delta\xi$ doit se trouver tout entière en dehors de la surface impénétrable, ou sur cette même surface, quand $\Delta\varepsilon$ sera un déplacement possible; il s'en suit que la projection de $\Delta\xi$ sur la normale à la surface, à la fin du temps $t+dt$ et au point où se trouve μ à cette même époque, doit être positive ou zéro, or cette projection étant représentée par la différence

$$\Delta\varepsilon\cos\theta - d\mu\cos\alpha,$$

les lettres θ et α désignant les angles que $\Delta\varepsilon$ et $d\mu$ font avec la normale à la surface au point μ, et sans doute à la fin de $t+dt$; nous aurons

$$\Delta\varepsilon\cos\theta - d\mu\cos\alpha > 0,$$

sans en exclure l'égalité, toutes les fois que $\Delta\varepsilon$ représentera un déplacement possible. Nous verrons bientôt qu'on pourra négliger les infiniment petits du second ordre dans l'inégalité

$$\Delta\varepsilon\cos\theta - d\mu\cos\alpha > 0$$

et par suite, on pourra admettre que θ et α sont les angles que $\Delta\varepsilon$ et $d\mu$ font avec la normale au point μ, non à la fin du temps $t+dt$, mais à la fin du temps t. Présentée de cette manière,

Digitized by Google

l'inégalité dont il s'agit, n'excluant point l'égalité, exprimera la condition des déplacements possibles relatifs à la surface impénétrable, car elle sera nécessairement satisfaite par toute valeur de $\Delta\varepsilon$ que cette surface n'empêche pas, et sans doute ne le sera pas par les $\Delta\varepsilon$ purement idéales, c'est-à-dire par ceux que l'impénétrabilité de la surface rend impossibles. Pour ce qui regarde $d\mu\cos\alpha$, cette projection sera donnée dans chaque cas particulier, car la manière dont se déplace et varie la surface impénétrable doit être connue. Supposons, par exemple, qu'on en connaît l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0$$

en coordonnées rectangles. Les lettres x, y, z représentant les coordonnées de μ, et par conséquent celles de m, à la fin du temps t; $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, en négligeant les infiniment petits du second ordre, seront les coordonnées de μ à la fin du temps $t+dt$, et comme nous avons

$$0 = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt$$

en divisant par le radical

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}$$

pris positivement, nous en tirerons sur le champ

$$d\mu\cos\alpha + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} = 0$$

et par suite, la condition pour que $\Delta\varepsilon$ soit possible, deviendra

$$\Delta\varepsilon\cos\theta + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} > 0$$

sans en exclure l'égalité.

Au reste, si la surface est donnée par son équation entre les coordonnées rectangles et le temps, la condition des déplacements possibles de m qui s'y rapportent se trouvera encore plus simplement ainsi qu'il suit. Désignons par $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées de m après le déplacement $\Delta\varepsilon$, nous aurons sur le champ

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+dt) > 0$$

sans en exclure l'égalité, car le point m peut ne pas se détacher de la surface, or en négligeant les infiniment petits du second ordre et à cause de $f=0$, vous avez

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+dt) = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \frac{df}{dz}\Delta z + \frac{df}{dt}dt$$

donc

$$\frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dy}\Delta y + \frac{df}{dz}\Delta z + \frac{df}{dt}dt > 0$$

Digitized by Google

ou bien, en divisant par le radical

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}}$$

pris positivement,

$$\Delta\varepsilon\cos\theta+\frac{\frac{df}{dt}\,dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}}}>0$$

3. Ayant trouvé les accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... rappelez vous les propriétés des quantités L, L_1, L_2, L_3,.... par lesquelles les déplacements possibles du système sont définis; vous égalerez à zéro les accroissements de celles des quantités dont il s'agit qui ne peuvent point varier, vous ferez plus grands que zéro les changements des quantités qui ne peuvent pas diminuer, mais vous n'en excluerez pas et l'égalité à zéro, car les quantités auxquelles ces changements répondent, ne variant point dans cette hypothèse, sans doute ne diminueront pas. Enfin, vous ferez plus petits que zéro les accroissements des quantités qui ne sauraient augmenter, sans en exclure aussi l'égalité à zéro.

C'est de cette manière que vous aurez les conditions des déplacements possibles; supposons, par exemple, qu'elles soient

$$\Delta L>0,\ \Delta L_1,>0,\ \Delta L_2<0,\ \Delta L_3=0.....$$

Remarquez d'abord que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,..., qui entrent dans ΔL, ΔL_1, ΔL_2....., ne satisfont point aux conditions ci-dessus, ils sont arbitraires, comme il a été dit; mais si vous leur attribuez certaines valeurs particulières, vous saurez si ces valeurs sont possibles ou non pour le système, selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas aux conditions dont il s'agit.

Remarquez ensuite que la condition telle que

$$\Delta L_2<0,$$

sans en exclure l'égalité, est complètement remplacée par celle-ci

$$-\Delta L_2>0.$$

Eu égard à cette remarque, nous pouvons supposer, et nous le supposerons pour plus d'uniformité, que dans les inégalités qui définissent les déplacements possibles, et qui n'excluent jamais les égalités, le sommet du signe $>$ sera toujours tourné vers zéro.

Mais la remarque la plus importante se rapporte au mode de composition des accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3..., qui contiendront sans doute les infiniment petits des différents ordres. En désignant par n l'ordre d'une des quantités L, L_1, L_2, L_3,.... le changement correspondant renfermera les termes des ordres $n+1$, $n+2$, $n+3$,...., que nous désignerons respectivement par $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$,... en sorte que la valeur du changement en question sera

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)+.....$$

Digitized by Google

Or cette valeur devant être zéro ou positive, il est nécessaire que son premier terme $(n+1)$ soit zéro ou positif en même temps que toute la série; car s'il ne l'était pas, les autres termes, infiniment plus petits que lui, ne pourraient ni annuller la série, ni la faire changer de signe, qui sera toujours celui de son premier terme. Il en résulte que dans le calcul des accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... on peut n'avoir égard qu'à la première puissance des déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$ $\Delta\varepsilon'''$,.... et qu'il est permis de rejeter tous les termes où ces déplacements auraient deux, ou un plus grand nombre de dimensions, ce qui fera devenir les accroissements ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,..... fonctions linéaires de $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$...; on les trouvera donc par les procédés ordinaires du calcul des variations, et ils auront la forme

$$a\Delta\varepsilon\cos\psi + a'\Delta\varepsilon'\cos\psi' + a''\Delta\varepsilon''\cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi''' + \ldots\ldots + T\,dt,$$

ou seront susceptibles de la recevoir. Les lettres a, a', a'' a''',...., T désignent des quantités données, ou dépendantes d'une manière donnée de la position du système, c'est-à-dire des coordonnées des masses m, m', m'', m''',... et du temps t. Les lettres ψ, ψ', ψ'', ψ''',..... représentent les angles que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... font avec certaines directions, qu'il est impossible de nommer quand on parle généralement, mais dans les cas particuliers, elles peuvent être celles des droites qui réunissent les points du système, ou celles des normales aux surfaces impénétrables auxquelles se trouveraient contigus quelques uns de ces mêmes points, ou celles des droites fixes comme les axes coordonnés, ou enfin d'autres directions que l'on connaîtra dans chaque cas particulier, et que généralement nous désignerons par D, D', D'', D''',....; en sorte que ψ'', par exemple, sera l'angle compris entre $\Delta\varepsilon''$ et une direction D'', dont nous ne pouvons pas définir la nature.

Les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,... ayant la forme qu'on vient de citer, nous supposerons que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... seront possibles quand ils satisferont aux inégalités

$$(1) \qquad \Delta L > 0,\ \Delta L_1 > 0,\ \Delta L_2 > 0,\ \Delta L_3 > 0,\ldots\ldots$$

dont quelques unes, ou même toutes, peuvent être des équations, et dont aucune n'exclut l'égalité; et si les conditions dont il s'agit ne sont pas remplies, le système ne pourra point recevoir le déplacement correspondant $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,....

4. A partir de chaque position de m, depuis le commencement du mouvement, imaginons $\Delta\varepsilon$ correspondant, arbitraire sans doute, mais cependant satisfaisant à la condition de la continuité, sans laquelle les considérations semblables à celle que nous exposons seraient impossibles. Les extrémités de tous les $\Delta\varepsilon$ formeront une courbe infiniment proche de la trajectoire de m, et du reste arbitraire. Imaginez un point μ, purement fictif, qui parcoure cette courbe, quand m se meut dans sa trajectoire, et qui se trouve à la fin du temps $t+dt$ à l'extrémité de celui des déplacements $\Delta\varepsilon$ dont l'origine est au point m à la fin de t. De cette manière, $\Delta\varepsilon$ sera la ligne $m\mu$ qui réunit la position du point m à l'instant t avec la position de μ à l'instant $t+dt$. Remarquez qu'une quantité quelconque Q, l'espace parcouru, la vitesse, les coordonnées etc., re-

Digitized by Google

latives au point m, deviendra $Q+\Delta Q$ à l'extrémité de Δs ou au point μ, ΔQ représente une variation où l'on doit faire varier, non seulement la manière dont Q dépend du temps, mais aussi le temps lui même. Il convient d'introduire au lieu de $\Delta\varepsilon$ la distance entre les positions des points m et μ considérés tous les deux à la fin du temps t, distance que nous désignerons par $\delta\varepsilon$. L'origine de cette ligne infiniment petite est censée le point m, comme celle de $\Delta\varepsilon$. Une quantité quelconque, désignée tout-à-l'heure par Q, deviendra $Q+\delta Q$ à l'extrémité de $\delta\varepsilon$, δQ désignant une variation, où l'on ne fera changer que la dépendance entre Q et t, sans faire varier t le moins du monde.

Il est clair que $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ est la distance qui sépare les points m et μ à la fin du temps $t+dt$. Si donc on désigne par s l'arc de la trajectoire de m, décrit dans le temps t, afin que ds soit l'espace effectivement parcouru par ce point pendant l'instant dt qui suit le temps t, on verra immédiatement que $\Delta\varepsilon$ est le troisième côté du triangle dont les deux autres côtés sont ds et $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$. Ainsi, en désignant par ψ, α et θ les angles que font $\Delta\varepsilon$, ds et $\delta\varepsilon$ avec une même direction D, nous aurons

$$\Delta\varepsilon\cos\psi = ds\cos\alpha + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\theta + d_1\theta).$$

Nous mettons $\theta + d_1\theta$, et non $\theta + d\theta$, parce que la direction D, sur laquelle nous projetons les droites $\Delta\varepsilon$, ds et $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$, peut être variable : pour lors $\theta+d\theta$ représenterait l'angle compris entre $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ et la direction D à la fin du temps $t+dt$, or nous devons employer l'angle que $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ fait avec D à la fin du temps t. En d'autres termes, l'angle θ varie parce que les directions de $\delta\varepsilon$ et D varient toutes les deux, mais dans la comparaison des projections que nous faisons, nous devons avoir égard seulement au changement de la première des deux directions, en sorte que $\theta+d_1\theta$ désigne l'angle entre $\delta\varepsilon$ à la fin du temps $t+dt$ et D à la fin du temps t. Or

$$(\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon)\cos(\theta+d_1\theta) = \delta\varepsilon\cos\theta+d_1(\delta\varepsilon\cos\theta),$$

nous mettons $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ pour désigner une différentielle incomplète de $\delta\varepsilon\cos\theta$, il est facile de voir, d'après ce qu'on vient de dire, ce qui lui manque pour être complète, mais il n'est pas nécessaire qu'elle le soit, pour que $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ représente une quantité infiniment petite du second ordre, donc en rejetant les quantités de cet ordre, nous aurons

$$\Delta\varepsilon\cos\psi = ds\cos\alpha + \delta\varepsilon\cos\theta.$$

Il est visible que ce qui a été dit sur les déplacements de m s'appliquera mot-à-mot aux déplacements de tous les autres points du système, ainsi les extrémités des $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... formeront des courbes respectivement très proches aux trajectoires de m', m'', m''',.... Si donc nous désignons par s', $\delta\varepsilon'$, s'', $\delta\varepsilon''$, s''', $\delta\varepsilon'''$,.... pour m', m'', m''',.... les quantités respectivement analogues à celles qui ont été désignées par s et $\delta\varepsilon$ pour m, nous aurons

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon' \cos\psi' &= ds' \cos\alpha' + \delta\varepsilon' \cos\theta' \\
\Delta\varepsilon'' \cos\psi'' &= ds'' \cos\alpha'' + \delta\varepsilon'' \cos\theta'' \\
\Delta\varepsilon''' \cos\psi''' &= ds''' \cos\alpha''' + \delta\varepsilon''' \cos\theta'''
\end{aligned}$$

. . . . . .

les lettres ψ', α', θ' ; ψ'', α'', θ'' ; ψ''', α''' θ''',..... représentent respectivement les angles que $\Delta\varepsilon'$, ds', $\delta\varepsilon'$ font avec une direction D'; $\Delta\varepsilon''$, ds'', $\delta\varepsilon''$ font avec une direction D''; $\Delta\varepsilon'''$, ds'', $\delta s'''$ font avec une direction D''', ainsi de suite.

Substituons les valeurs précédentes de $\Delta\varepsilon \cos\psi$, $\Delta\varepsilon' \cos\psi'$, $\Delta\varepsilon'' \cos\psi''$, $\Delta\varepsilon''' \cos\psi'''$ dans les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2,... ou bien dans

$$a\Delta\varepsilon \cos\psi + a'\Delta\varepsilon' \cos\psi' + a''\Delta\varepsilon'' \cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi''' + ... + T\,dt$$

qui est une de ces variations, supposons par exemple la première, nous aurons

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha = {} & ads \cos\alpha + a'ds' \cos\alpha' + a''ds'' \cos\alpha'' + a'''ds''' \cos\alpha''' + ... + T\,dt \\
& + a\delta\varepsilon \cos\theta + a'\delta\varepsilon' \cos\theta' + a''\delta\varepsilon'' \cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon''' \cos\theta''' + ...
\end{aligned}$$

ou bien, en faisant pour abréger, ce qui du reste est convenable

$$\begin{aligned}
ads \cos\alpha + a'ds' \cos\alpha' + a''ds'' \cos\alpha'' + a'''ds''' \cos\alpha''' + ... + Tdt &= dL \\
a\delta\varepsilon \cos\theta + a'\delta\varepsilon' \cos\theta' + a''\delta\varepsilon'' \cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon''' \cos\theta''' + ... &= \delta L
\end{aligned}$$

il viendra

$$\Delta L = dL + \delta L.$$

On aura semblablement :

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 &= dL_1 + \delta L \\
\Delta L^2 &= dL_2 + \delta L_2 \\
\Delta L_3 &= dL_3 + \delta L_3 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est facile de savoir ce que sont les quantités dL_1, δL_1, dL_2, δL_2, dL_3, δL_3... car les accroissements ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... ayant une composition entièrement analogue à celle de ΔL, savoir :

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 &= a_1\Delta\varepsilon \cos\psi_1 + a_1'\Delta\varepsilon' \cos\psi_1' + a_1''\Delta\varepsilon'' \cos\psi_1'' + a_1'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi_1''' + ... + T_1 dt \\
\Delta L_2 &= a_2\Delta\varepsilon \cos\psi_2 + a_2'\Delta\varepsilon' \cos\psi_2' + a_2''\Delta\varepsilon'' \cos\psi_2'' + a_2'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi_2''' + ... + T_2 dt \\
\Delta L_3 &= a_3\Delta\varepsilon \cos\psi_3 + a_3'\Delta\varepsilon' \cos\psi_3' + a_3''\Delta\varepsilon'' \cos\psi_3'' + a_3'''\Delta\varepsilon''' \cos\psi_3''' + ... \quad T_3 dt
\end{aligned}$$

. . . . . .

où a_1, a_1', a_1'', a_1''', ... T_1, a_2, a_2', a_2'', a_2''', ... T_2, a_3, a_3', a_3'', a_3''', ... T_3 etc. sont fonctions des coordonnées de m, m', m'', m''', ... données dans chaque cas particulier, et ψ_1, ψ_1', ψ_1'', ψ_1''',..... ψ_2, ψ_2', ψ_2'', ψ_2''',.... ψ_3, ψ_3', ψ_3'', ψ_3''',.... etc., sont les angles que les déplacements $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... font avec certaines directions qu'il est impossible de pré-

Digitized by Google

ciser, et que nous désignerons par $D_1, D_1', D_1'', D_1''', \ldots D_2, D_2', D_2'', D_2''', \ldots D_3, D_3', D_3'', D_3''', \ldots$ en sorte que ψ_2''', par exemple, représentera l'angle compris entre $\Delta\varepsilon'''$ et la direction D_2'''. Cela posé, nous aurons

$$dL_1 = a_1\,ds\cos\alpha_1 + a_1'\,ds'\cos\alpha_1' + a_1''\,ds''\cos\alpha_1'' + a_1'''\,ds'''\cos\alpha_1''' + \ldots + T_1dt$$
$$dL_2 = a_2\,ds\cos\alpha_2 + a_2'\,ds'\cos\alpha_2' + a_2''\,ds''\cos\alpha_2'' + a_2'''\,ds'''\cos\alpha_2''' + \ldots + T_2dt$$
$$dL_3 = a_3\,ds\cos\alpha_3 + a_3'\,ds'\cos\alpha_3' + a_3''\,ds''\cos\alpha_3'' + a_3'''\,ds'''\cos\alpha_3''' + \ldots + T_3dt$$

. . . . . .

$$\delta L_1 = a_1\,\delta\varepsilon\cos\theta_1 + a_1'\,\delta\varepsilon'\cos\theta_1' + a_1''\,\delta\varepsilon''\cos\theta_1'' + a_1'''\,\delta\varepsilon'''\cos\theta_1''' + \ldots$$
$$\delta L_2 = a_2\,\delta\varepsilon\cos\theta_2 + a_2'\,\delta\varepsilon'\cos\theta_2' + a_2''\,\delta\varepsilon''\cos\theta_2'' + a_2'''\,\delta\varepsilon'''\cos\theta_2''' + \ldots$$
$$\delta L_3 = a_3\,\delta\varepsilon\cos\theta_3 + a_3'\,\delta\varepsilon'\cos\theta_3' + a_3''\,\delta\varepsilon''\cos\theta_3'' + a_3'''\,\delta\varepsilon'''\cos\theta_3''' + \ldots$$

. . . . . .

Il est facile de voir quels sont les angles que représentent les lettres α et θ, accentuées et numérotées.

5. Considérons une des différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, ... par exemple, la première; ce que nous en dirons s'appliquera aux autres. Il est clair que la différentielle dL est une valeur particulière de la variation ΔL, savoir celle que la dernière reçoit pour le déplacement effectif du système qui, sans doute, est un des déplacements possibles. Or dans le cas où la possibilité des déplacements exigerait que la quantité L ne variât point, savoir qu'on eût $\Delta L=0$ pour les déplacements possibles, on aura nécessairement $dL=0$. Et quand l'exigence des déplacements possibles consisterait seulement en ce que L ne puisse diminuer, ou que L ait une valeur minimum, on aurait encore $dL=0$ comme condition du minimum, ou plutôt comme condition que L ne varie pas actuellement, car si cette quantité variait, et sans doute en augmentant puisque dL ne saurait devenir negative, elle cesserait d'être minimum.

Nous croyons devoir cependant entrer dans quelques détails relativement à ce dernier cas.

La quantite L étant un minimum, ou plutôt ne pouvant diminuer, il est nécessaire, pour que cette circonstance fasse une liaison ou un obstacle, que le système soit sollicité au déplacement pour lequel L diminuerait, sans quoi la propriété du système par laquelle L ne saurait diminuer, n'en gènerait point le mouvement, et l'on pourrait se dispenser d'y avoir égard. Ainsi les efforts extérieurs empêcheront la différentielle dL d'acquérir une valeur positive, et comme elle ne peut être négative par la nature du système, il s'en suit qu'elle se réduira à zéro; et il en sera de même pour les autres différentielles dL_1, dL_2, dL_3,.... Ainsi nous aurons

$$(2) \qquad dL = 0,\ dL_1 = 0,\ dL_2 = 0,\ dL_3 = 0,\ \ldots\ldots$$

Il se pourrait cependant que dL eut une valeur positive, ce qui arriverait si les efforts extérieurs cherchaient à augmenter la quantité L, mais dans ce cas on rejettera la propriété du système exprimée par

$$L = \text{minimum},$$

Digitized by Google

comme si elle n'avait pas lieu, et par suite on n'aura point égard à la condition $dL > 0$, tant qu'elle sera remplie sans doute; ainsi les équations (2), qu'on vient d'écrire, auront lieu en rejetant tout ce qui est superflu.

Eu égard aux équations (2) les variations ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... se réduiront respectivement à δL, δL_1, δL_2, δL_3,.... et par suite les conditions (1) des déplacements possibles deviendront

$$(3) \qquad \delta L > 0,\ \delta L_1 > 0,\ \delta L_2 > 0,\ \delta L_3 > 0,.....$$

quelques unes de ces inégalités, ou même toutes, peuvent être des équations et aucune n'exclut l'égalité. Les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,.... qui entrent dans leurs premiers membres sont arbitraires; ils ne sont donc pas assujettis à satisfaire aux inégalités dont il s'agit; celles-ci ne servent qu'à distinguer les déplacements possibles de ceux qui ne le sont pas.

On peut trouver les variations δL, δL_1, δL_2, δL_3,... directement, c'est-à-dire sans passer par ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3,.... Pour cela il n'y aura qu'à considérer le système dans deux positions: dans celle qu'il a en effet à la fin du temps t, et dans la position qu'il aurait après que ses points eussent parcouru, respectivement, les espaces $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... Les deux positions répondent à un même instant, la fin de t, ensorte que, dans le passage de la première à l'autre, le temps ne varie point. Cherchez les valeurs L', L_1', L_2', L_3',.... de L, L_1, L_2, L_3,... relatives à la seconde position, en ne tenant compte que des premières puissances des déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,..., et vous aurez

$$\delta L = L'-L,\ \delta L_1 = L_1'-L_1,\ \delta L_2 = L_2'-L_2,\ \delta L_3 = L_3'-L_3, \text{ etc.}$$

La détermination des variations δL, δL_1, δL_2, $\delta_3 L$,.... peut être souvent simplifiée par la décomposition des déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... auxquels ces variations répondent. En effet, décomposons les déplacements dont il s'agit, chacun en un nombre quelconque k d'autres déplacements, satisfaisant aux conditions ordinaires dans cette sorte de décompositions: savoir que $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$,.... soient, chacun, le dernier côté du polygone dont les déplacements composants, qui lui correspondent forment, les autres côtés. Désignons ces derniers déplacements par

$\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, ... $\delta\varepsilon_k$ pour la masse m
$\delta\varepsilon_1'$, $\delta\varepsilon_2'$, $\delta\varepsilon_3'$, ... $\delta\varepsilon_k'$ pour la masse m'
$\delta\varepsilon_1''$, $\delta\varepsilon_2''$, $\delta\varepsilon_3''$, ... $\delta\varepsilon_k''$ pour la masse m''
$\delta\varepsilon_1'''$, $\delta\varepsilon_2'''$ $\delta\varepsilon_3'''$, ... $\delta\varepsilon_k'''$ pour la masse m'''
etc.

En ne tenant compte que des premières puissances de ces déplacements, cherchez les changements $\delta_1 L$, $\delta_1 L_1$, $\delta_1 L_2$, $\delta_1 L_3$... de L, L_1, L_2, L_3,.... correspondants aux déplacements $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_1'$, $\delta\varepsilon_1''$, $\delta\varepsilon_1'''$... puis cherchez les changements $\delta_2 L$, $\delta_2 L_1$, $\delta_2 L_2$, $\delta_2 L_3$,... des mêmes quantités L, L_1, L_2, L_3.... correspondants aux déplacements $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_2'$, $\delta\varepsilon_2''$, $\delta\varepsilon_2''$,.... cherchez ensuite les changements $\delta_3 L$, $\delta_3 L_1$, $\delta_3 L_2$, $\delta_3 L_3$,.... relatifs aux déplacements $\delta\varepsilon_3$, $\delta\varepsilon_3'$, $\delta\varepsilon_3''$, $\delta\varepsilon_3'''$,.... et con-

Digitized by Google

tinuez de la même manière jusqu'à ce que vous ayez trouvé les variations $\delta_k L, \delta_k L_1, \delta_k L_2, \delta_k L_3, \ldots$ qui répondent aux déplacements $\delta\varepsilon_k, \delta\varepsilon_k', \delta\varepsilon_k'', \delta\varepsilon_k''', \ldots$ Vous aurez ensuite

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta_1 L + \delta_2 L + \delta_3 L + \ldots + \delta_k L \\
\delta L_1 &= \delta_1 L_1 + \delta_2 L_1 + \delta_3 L_1 + \ldots + \delta_k L_1 \\
\delta L_2 &= \delta_1 L_2 + \delta_2 L_2 + \delta_3 L_2 + \ldots + \delta_k L_2 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

C'est le dernier degré de simplicité dans ce qu'on peut dire en général de la recherche des conditions des déplacements possibles.

6. Supposons, par exemple, qu'il s'agit de trouver la variation que souffre un élément du volume d'un corps, par le déplacement infiniment petit de ce corps; problème que Lagrange avait à résoudre en traitant de l'équilibre des fluides incompressibles *). Ce qui nous paraît le plus simple pour cet objet, serait l'emploi de la transformation des coordonnées dans les intégrales triples qui se rapportent à la question, mais nous voulons suivre le procédé de Lagrange.

Rapportons les corps aux axes rectangles des coordonnées x, y, z, qui par leur variabilité apartiendront à tous les points du corps; en désignant par $x+dx, y+dy, z+dz$ les coordonnées d'un point infiniment proche du point (x, y, z), nous pouvons prendre $dxdydz$ pour un élément du volume dont il s'agit de trouver la variation. Supposons que le déplacement du corps consiste en ce que les points qui répondaient aux coordonnées x, y, z, se trouvent avoir acquis les coordonnées $x+\delta x, y, z$. Ces dernières seront celles d'un angle de quadrilatère qui, avant le déplacement, était rectangle $dxdy$ et qui répondait à l'ordonnée z. Les trois autres angles du quadrilatère, après le déplacement, auront pour coordonnées

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx,\ y,\ z;$$

$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy,\ y + dy,\ z;$$

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy,\ y + dy,\ z;$$

d'où l'on voit que les quatre angles de la figure sont compris dans un plan parallèle à celui des xy, et comme de plus les côtés opposés ne se rencontrent pas et sont égaux entre eux, savoir deux égaux à dy, et deux autres à $\delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx$, on en conclura que le quadrilatère est un parallélogramme. On s'assurera de même que les autres rectangles, faces du parallélépipède $dxdydz$, resteront des parallélogrammes après le déplacement; donc le parallélépipède $dxdydz$ lui-même restera parallélépipède; et comme les coordonnées des extrémités des arêtes de ce dernier, arêtes ayant le point $(x + \delta x, y, z)$ pour origine commune, répondent aux coordonnées $x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx}, y, z;\ x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy, y + dy, z;\ x + \delta x + \frac{d\delta x}{dz} dz, y, z + dz,$

*) Mécanique Analytique, tome I, page 189 et les suivantes.

Digitized by Google

on trouvera sur le champ que $\left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) dxdydz$ est le volume du nouveau parallélépipède; en retranchant celui du premier, savoir $dxdy\delta z$, on aura

$$\frac{d\delta x}{dx}\, dxdydz$$

pour changement du volume de $dxdydz$ dû au déplacement supposé.

Sans faire de nouveaux calculs, on conclura par l'analogie que si les coordonnées x, y, z devenaient par le déplacement x, $y + \delta y$, z, ou x, y, $z + \delta z$, les changements correspondants du volume seraient $\frac{d\delta y}{dy}\, dxdydz$ et $\frac{d\delta z}{dz}\, dxdydz$. En réunissant les trois variations partielles $\frac{d\delta x}{dz}\, dxdydz$, $\frac{d\delta y}{dy}\, dxdydz$, $\frac{d\delta z}{dz}\, dxdydz$, on aura la variation totale

$$\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right) dxdydz$$

qui répondra au déplacement arbitraire du corps, par lequel les coordonnées x, y, z deviendraient simultanément $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

7. Si l'on pouvait trouver les différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, etc. la considération des variations désignées par Δ serait superflue; or pour avoir les différentielles dont il s'agit, il n'y a qu'à calculer ce que deviennent les quantités L, L_1, L_2, L_3, ... censées se rapporter au temps t, à la fin du temps $t + dt$; on ne retiendra dans ce calcul que la première puissance de l'élément dt, on en négligera les carrés et les puissances supérieures. Les différences entre les valeurs de L, L_1, L_2, L_3, ... calculées, comme on vient de le dire, pour l'instant $t + dt$, et leurs valeurs pour l'instant t donneront les valeurs respectives des différentielles dL, dL_1, dL_2, dL_3, ...

Ainsi les variations δ, comme les différentielles d, résultent de la comparaison respective et mutuelle des quantités $L, L_1, L_2, L_3, \ldots$, calculées pour deux positions du système : l'une de ces positions est celle du système à la fin du temps t, elle est commune aux deux caractéristiques; l'autre position, pour les variations, répond au même temps t, mais en admettant que les points du système se trouvent sur les courbes différentes de celles qu'ils décrivent en effet; tandis que la seconde position, pour les différentielles, est celle que le système aura en effet à la fin du temps $t + dt$. Le temps varie donc de la première à la seconde position dont la différence fournit les différentielles, et il ne change point pour les variations δ. Quant aux changements Δ, on doit y faire varier et le temps et les courbes décrites, or il arrive que les Δ sont représentés par la somme des d et des δ, ce qui est entièrement conforme à la nature du calcul des variations, par laquelle les accroissements dus aux changements simultanés des variables et de leur dépendance, sont représentés par la somme des accroissements partiels, savoir de ceux qui viennent uniquement du changement des variables et de ceux qui résultent uniquement du changement de la dépendance entre ces mêmes variables.

Comme vous pouvez sans doute attribuer aux variations $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... les valeurs et les directions particulières à volonté, supposez les respectivement égalées aux différentielles ds, ds', ds'', ds''',.... cette hypothèse vous fournira, par exemple,

$$\delta L = dL - Tdt$$

Digitized by Google

Or comme dL est zéro, vous aurez, en faisant coïncider, en grandeur et direction, $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$... respectivement avec ds, ds', ds'', ds''',....

$$(4) \qquad \delta L = -Tdt,\ \delta L_1 = -T_1 dt,\ \delta L_2 = -T_2 dt,\ \delta L_3 = -T_3 dt, \ldots.$$

résultat qu'il convient de retenir.

Nous terminerons cet article en reproduisant une remarque que nous avons faite depuis longtemps *), elle se rapporte à une méprise échappée à l'auteur de la Mécanique Analytique.

Supposez que par la nature du système, ou des obstacles extérieurs, une quantité L doit demeurer invariable, vous aurez

$$\delta L = 0$$

pour les déplacements possibles; supposez qu'une seconde quantité L_1 fournissant aussi une liaison pour les points du système, renferme la quantité L, avec d'autres variables. Vous aurez

$$\delta L_1 = \delta K + \lambda \delta L$$

δK représente la partie de δL_1 où l'on n'a pas fait varier L, et $\lambda\delta L$ représente l'autre partie due au changement de L. Lagrange supprime cette derniere $\lambda\delta L$, par la raison que δL est zéro. Le grand géomètre perd de vue que, l'équation générale de la mécanique contient les variations δL et δL_1, dans l'hypothèse que les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,... qui y entrent sont tout-à-fait arbitraires et non pas seulement possibles, donc δL n'y est pas zéro, et par suite on doit nécessairement conserver le terme $\lambda\delta L$. Vouloir le supprimer, autant ne pas faire usage de la condition $\delta L = 0$ des déplacements possibles.

Ajoutons qu'en faisant disparaître sous le signe intégral la combinaison caractéristique $d\delta$, à l'aide de l'intégration par parties, Lagrange supprime les termes que cette opération fait sortir hors de l'intégrale, quand ces termes se réduiraient à zéro pour les déplacements possibles; méprise tout-à-fait du même genre que celle qu'on vient d'indiquer. Les termes dont il s'agit ne sont pas nuls, puisque ils se rapportent aux déplacements tout-à-fait arbitraires qu'il n'est pas permis de confondre avec les déplacements possibles. En les supprimant, on se prive du moyen de déterminer les efforts que supportent les obstacles dont la présence fournit les conditions par lesquelles les termes en question disparaîtraient, si l'on ne considérait que les déplacements possibles, et par suite, la solution du problème serait incomplète.

8. Nous empruntons l'équation générale du mouvement à notre mémoire sur les déplacements instantanés cité au commencement de celui-ci **).

En désignant par ν, ν', ν'', ν''',..... et par P, P' P'' P''',.... les vitesses respectives des masses m, m', m'', m''',.... à la fin du temps t, et les forces motrices qui animent ces mêmes

*) Mémoires de l'Académie Impériale, tome II, Bulletin Scientifique, page 1ère. Note sur l'équilibre d'un fil élastique. Lue le 16 mai 1832.

**) Mémoires de l'Académie Impériale, tome III, page 591, l'équation (18). Il y faut rétablir les facteurs δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$,... que l'imprimeur supprima par erreur, et qui représentent ce que nous désignons, dans le mémoire actuel, par $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,....

Digitized by Google

masses à la même époque ; et en supposant que les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,.... font respectivement avec les vitesses les angles $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$,... et avec les forces les angles $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$,... l'équation dont il s'agit sera

$$(5)\quad 0 = \Sigma\left(P\cos\varphi\,\delta\varepsilon - m\frac{d_1 v\cos\omega}{dt}\delta\varepsilon\right) + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots.$$

La caractéristique d_1 marque une différentiation incomplète, par laquelle en différentiant relativement au temps l'angle ω, pour avoir $d_1\omega$, il ne faut point y faire varier la direction de $\delta\varepsilon$, mais seulement celle de v ; le signe Σ s'étend à toutes les masses du système, pour indiquer la somme de toutes les quantités analogues à celles qui se trouvent sous ce même signe, cette somme est le moment des forces perdues. Les facteurs λ, λ_1, λ_2, λ_3,.... sont des inconnues qu'on pourra toujours regarder comme ayant des valeurs positives.

Les $\delta\varepsilon$ de l'équation précédente sont tout-à-fait arbitraires, en sorte que cette équation ne peut avoir lieu à moins que les coefficients des $\delta\varepsilon$, chacun en particulier, ne soit zéro.

L'équation (5) sert de base et à la théorie générale du mouvement, et à celle de la percussion; nous allons lui donner une autre forme, dans laquelle, ne perdant rien en facilité pour en déduire la dernière, on trouvera plus de commodité dans les applications de la première. Nous regardons la transformation que nous voulons exposer comme un supplément au mémoire sur les déplacements instantanés.

Remplaçons le terme $\frac{d_1 v\cos\omega}{dt}\delta\varepsilon$ de l'équation (5) par la différence

$$\frac{d_1(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt}.$$

Nous savons que pour avoir $d_1\omega$, on ne doit faire varier dans ω que la direction de v, nullement celle de $\delta\varepsilon$; désignons par $d_2\omega$ la différentielle de ω uniquement relative à la variation de cette dernière direction, point de celle de v, nous aurons évidemment $d\omega = d_1\omega + d_2\omega$, d'où $d_1\omega = d\omega - d_2\omega$ ce qui, nous donnera

$$\frac{d_1(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt}$$

et par suite

$$\frac{d_1(v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\left(\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt} + \delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt}\right)$$

ou bien

$$\frac{d_1(v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\frac{d_2\delta\varepsilon\cos\omega}{dt}.$$

La différentielle d_2 est incomplète, en ce que dans $d_2\omega$ on ne doit faire varier que la direction de $\delta\varepsilon$, point celle de v.

Revenons aux considérations exposées au commencement de l'art. 4. La vitesse de m, c'est-à-dire du point où commence $\delta\varepsilon$, étant v, $v+\delta v$ sera la vitesse du point final de $\delta\varepsilon$, donc ce point, pendant que m parcourra l'espace ds ou vdt, décrira la droite $(v+\delta v)\,dt$, et comme à la fin du temps $t+dt$ il se trouvera à la distance $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$ de m, il s'en suivra que

Digitized by Google

quatre droites infiniment petites vdt, $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon$ et $(v+\delta v)\,dt$ formeront quatre côtés d'un quadrilatère; et par conséquent, la somme des projections, sur une direction quelconque, des deux premiers côtés sera égale à la somme des projections sur la même direction, des deux autres côtés. En prenant pour ligne des projections la direction de v et en désignant par $\tilde{\omega}$ l'angle entre v et $v + \delta v$, nous aurons

$$vdt + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + (v + \delta v)\cos\tilde{\omega}\,dt$$

d'où, à cause de

$$(\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + d_2(\delta\varepsilon\cos\omega),$$
$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = (v + \delta v)\cos\tilde{\omega}\,dt - vdt.$$

Cette formule nous montre que l'angle $\tilde{\omega}$ doit être infiniment petit *); au reste, il est facile de s'en assurer, donc en remplaçant cos ω par l'unité, on trouvera

$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = \delta v dt$$

ou bien

$$\frac{d_2(\delta\varepsilon\cos\omega)}{dt} = \delta v.$$

Mais peut-être l'idée, que l'angle $\tilde{\omega}$ est infiniment petit, ne se laisse pas saisir immédiatement: nous allons l'éclaircir. Par l'extrémité de $\delta\varepsilon$ menez une droite de même direction que v et égale à vdt; puis, achevez le quadrilatère. Cette figure ayant deux côtés parallèles, égaux chacun à vdt et se trouvant d'un même côté de $\delta\varepsilon$, sera parallélogramme; partant le quatrième côté, que vous venez de mener pour achever la figure, sera parallèle et égal à $\delta\varepsilon$. Or ce quatrième côté et $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, si vous réunissez leurs extrémités, formeront un triangle dont le troisième côté, celui par lequel vous avez réuni les extrémités des deux autres, sera infiniment petit du second ordre, parce que $\delta\varepsilon$ variant d'une manière continue en grandeur et en direction, l'angle compris entre cette ligne et $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$ sera infiniment petit. Mais ce troisième côté infiniment petit du second ordre est en même temps le troisième côté d'un autre triangle, ayant $(v+\delta v)\,dt$ et vdt pour ses deux autres côtés; le dernier étant celui que vous avez mené par l'extrémité de $\delta\varepsilon$ dans la direction de la vîtesse v. L'angle $\tilde{\omega}$ étant compris entre ces deux côtés, qui sont infiniment petits du premier ordre, et étant opposé au côté infiniment petit du second ordre, sera nécessairemeint infiniment petit.

Remplaçant $\frac{d_2\,\delta\varepsilon\cos\omega}{dt}$ par δv, nous aurons

$$\frac{d_1(v,\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} = \frac{d(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dx} - v\delta v,$$

par suite l'équation (5) deviendra

*) Parce que le terme multiplié par dt doit s'en aller, comme incomparable avec la combinaison caractéristique dd.

Digitized by Google

$$(6)\quad \frac{d\Sigma mv\cos\omega\,\delta\varepsilon}{dt} = \delta\frac{\Sigma mv^2}{2} + \Sigma P\cos\varphi\,\delta\varepsilon + \lambda\,\delta L + \lambda_1\,\delta L_1 + \lambda_2\,\delta L + \lambda_3\,\delta L_1 + \ldots$$

Cette équation est susceptible d'un énoncé fort simple, mais il faut d'abord examiner la signification de l'expression

$$\lambda\,dL + \lambda_1\,\delta L_1 + \lambda_2\,\delta L_2 + \lambda_3\,\delta L_3 + \ldots.$$

qui s'y trouve contenue.

En mettant pour les δL leurs valeurs $a\cos\theta\,\delta\varepsilon + a'\cos\theta'\delta\varepsilon' + \ldots$ etc. et nous servant du signe sommatoire Σ, l'expression dont il s'agit deviendra

$$\Sigma\,(\lambda a\cos\theta\,\delta\varepsilon + \lambda_1 a_1\cos\theta_1\,\delta\varepsilon + \lambda_2 a_2\cos\theta_2\,\delta\varepsilon + \lambda_3 a_3\cos\theta_3\,\delta\varepsilon + \ldots..)$$

elle est donc de même forme que le terme $\Sigma P\cos\varphi\,\delta\varepsilon$ de l'équation (6) dû aux puissances motrices, et par conséquent, elle peut être attribuée aux forces, fictives sans doute, mais dont les valeurs et les directions s'aperçoivent facilement. Celles qu'on doit supposer pour cet objet comme agissant au point m, ont

$$\lambda a,\ \lambda_1 a_1,\ \lambda_2 a_2,\ \lambda_3 a_3,\ldots$$

pour valeurs et coïncident respectivement avec D, D_1, D_2, D_3,... en directions. Des forces semblables doivent être censées appliquées aux autres points du système, et leur ensemble fournirait dans l'équation du mouvement le même terme que celui qui se trouve introduit dans l'équation (6) par la présence réelle des liaisons et des obstacles qui gènent le déplacement du système. Ainsi le mouvement des masses m, m', m'', m''',... que nous considérons est donné par la même équation que si ces masses étaient absolument libres, c'est-à-dire sans aucune liaison mutuelle, ou obstacle extérieur qui en gènât le déplacement, pourvu qu'outre les forces respectives P, P', P'', P''',.... elles soient encore sollicitées par les puissances que nous venons d'indiquer. Par cette raison, ces dernières s'appellent forces qui remplacent les liaisons du système, ou simplément, forces de liaison; la somme

$$\Sigma\,(\lambda a\cos\theta\,\delta\varepsilon + \lambda_1 a_1\cos\theta_1\,\delta\varepsilon + \lambda_2 a_2\cos\theta_2\,\delta\varepsilon + \ldots)$$

ou celle-ci

$$\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots..$$

en représente le moment.

Cela posé, l'équation (6) s'énoncera comme il suit:

La variation de la force vive, plus le moment des forces motrices, plus celui des forces de liaison font une dérivée, relative au temps, du moment de la quantité du mouvement du système.

On peut abréger cet énoncé : il suffit de dire:

La variation de la force vive, plus le moment des forces motrices, plus celui des forces de liaison font une dérivée exacte relative au temps.

Il est superflu d'ajouter à quelle quantité se rapporte cette dérivée; car dès qu'on regarde la somme qu'on vient de nommer comme une dérivée exacte, cette dernière, c'est-à-dire

Digitized by Google

la dérivée, se rapportera nécessairement au moment de la quantité du mouvement du système. Nous supprimons la démonstration de cette proposition; on y suppléera facilement, car elle n'est que la reproduction, en sens inverse, de la transformation qui nous a conduit de l'équation (5) à l'équation (6).

Avant d'aborder la question principale de notre mémoire, nous indiquerons encore, comment l'énoncé qui précède conduira, dans chaque cas, aux équations du mouvement, je ne dirai pas les plus simples, mais à celles qu'on voudra employer. La simplicité et la commodité des équations dépendent d'un choix convenable des coordonnées, qu'on prendra pour fixer la position du système à chaque instant; il est impossible de dire rien de général sur cet objet, car à chaque cas particulier répondront les coordonnées qui lui seront les plus propres, mais qui généralement ne se prêteront pas commodément à d'autres cas. La question inverse, c'est-à-dire : après avoir choisi les coordonnées, rechercher les cas qu'elles résolvent avec facilité, présente bien moins de difficultés. Nous aurons en vue cet objet pour le traiter dans l'occasion.

Désignons par ξ, η, ζ,.... les coordonnées que nous voudrons employer, les jugeant les plus propres au système que nous considérons. Introduisons ces coordonnées et dans la somme des moments

$$\Sigma P \cos\varphi \, \delta\varepsilon + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \ldots$$

et dans la force vive $\frac{\Sigma mv^2}{2}$, que, pour abréger, nous désignerons par T. Par cette introduction, la somme des moments prendra la forme

$$X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta + \ldots\ldots$$

X, Y, Z,.... étant fonctions du temps, des coordonnées ξ, η, ζ,... et renfermant, sous une forme linéaire, les inconnues λ, λ_1, λ_2, λ_3..... en sorte que la formule qui doit être une dérivée exacte, sera

$$\delta T + X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + \ldots\ldots$$

Or, en désignant pour plus de commodité, par ξ', η', ζ'... les dérivées $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$,... nous aurons

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{d\eta}\delta\eta + \frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta + \ldots + \frac{dT}{d\xi'}\delta\xi' + \frac{dT}{d\eta'}\delta\eta' + \frac{dT}{d\zeta'}\delta\zeta' + \ldots$$

ou bien, en faisant pour abréger

$$\frac{dT}{d\xi'} = p,\ \frac{dT}{d\eta'} = q,\ \frac{dT}{d\zeta'} = r,\ldots,$$

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{d\eta}\delta\eta + \frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta + \ldots + p\delta\xi' + q\delta\eta' + r\delta\zeta' + \ldots.$$

ou bien encore

$$\delta T = \frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots.) + \left(\frac{dT}{d\xi} - \frac{dp}{dt}\right)\delta\xi + \left(\frac{dT}{d\eta} - \frac{dy}{dt}\right)\delta\eta + \left(\frac{dT}{d\zeta} - \frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta + \ldots.$$

Digitized by Google

Substituant cette valeur dans l'expression qui doit se réduire à une dérivée exacte par rapport au temps, cette expression deviendra

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots.) + \left(X + \frac{dT}{d\xi} - \frac{dp}{dt}\right)\delta\xi + \left(Y + \frac{dT}{d\eta} - \frac{dq}{dt}\right)\delta\eta + \left(Z + \frac{dT}{d\zeta} - \frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta + \ldots..$$

et pour qu'elle soit une dérivée exacte, il est nécessaire que l'on ait

$$0 = \left(X + \frac{dT}{d\xi} - \frac{dp}{dt}\right)\delta\xi + \left(Y + \frac{dT}{d\eta} - \frac{dq}{dt}\right)\delta\eta + \left(Z + \frac{dT}{d\zeta} - \frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta + \ldots. \quad (A)$$

car alors, et seulement alors, l'expression dont il s'agit se réduisant à

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots)$$

sera visiblement la dérivée exacte. Nous aurons donc

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots) = \delta T + X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + \ldots..$$

L'égalité (A) pourrait fournir les équations du mouvement, mais comme elles ne seront pas les plus simples, nous ne nous y arrêterons pas, malgré que cette égalité donne lieu à quelques remarques curieuses.

Remplaçons, dans la dernière équation, la dérivée $\frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\zeta + \ldots)$ par l'expression équivalente

$$\delta(p\xi' + q\eta' + r\zeta' + \ldots.) + \frac{dp}{dt}\delta\xi + \frac{dq}{dt}\delta\eta + \frac{dr}{dt}\delta\zeta + \ldots - \xi'\delta p - \eta'\delta q - \zeta'\delta r - \ldots..,$$

et faisons pour abréger

$$T - p\xi' - q\eta' - r\zeta' - \ldots. = \Theta$$

nous aurons

$$\frac{dp}{dt}\delta\xi + \frac{dq}{dt}\delta\eta + \frac{dr}{dt}\delta\zeta + \ldots = \delta\Theta + X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta + \ldots. - \xi'\delta p - \eta'\delta q - \xi'\delta r - \ldots$$

Chassez de Θ les dérivées ξ', η', ζ',.... à l'aide des équations

$$\frac{dT}{d\xi'} = p, \quad \frac{dT}{d\eta'} = q, \quad \frac{dT}{\delta\zeta'} = r, \ldots..$$

et la dernière formule sera l'équation du mouvement sous la forme la plus simple, mais naturellement la plus simple pour les coordonnées que vous avez choisies; elle se décomposera et donnera les équations

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\Theta}{d\xi} + X$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Theta}{d\eta} + Y$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\Theta}{d\zeta} + Z$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{d\Theta}{dp}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{d\Theta}{dq}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{d\Theta}{dr}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Remarquez bien que le plus souvent Θ sera égal à la force vive T prise négativement.

La solution de la question relative au mouvement du système reviendra à la résolution des dernières équations et de celles-ci

$$(2) \qquad 0 = dL,\ 0 = dL_1,\ 0 = dL_2,\ 0 = dL_3,\ldots\ldots$$

9. Supposons qu'à la fin du temps t, des forces motrices, d'une très grande intensité, s'appliquent tout-à-coup au système, mais qu'elles n'agissent que pendant un temps τ extrêmement court; et qu'il arrive, à la même époque, des changements brusques dans les liaisons du système, par la suppression de quelques unes de ces liaisons et par l'établissement d'autres.

Une force motrice d'une très grande intensité et d'une très petite durée porte souvent le nom de force impassive. L'idée d'un pareil effort ne peut présenter rien d'obscur, la dénomination ne change pas la nature de l'objet, et la force impassive est toujours une force motrice ordinaire, c'est-à-dire de ces forces que la mécanique considère, indépendamment de leurs intensités et de la durée de leur action.

Mais nous croyons devoir entrer dans quelques explications sur le changement dans les liaisons du système. Nous présenterons d'abord quelques considérations sur les liaisons d'une nature particulière.

Supposons que parmi les quantités L, L_1, L_2, L_3,... qu'on suppose ne pouvoir pas diminuer, il s'en trouve, et par exemple la première, qui par un effort convenable diminuerait; comme le ferait le volume d'un fluide élastique par la pression. Mais la diminution de L exige nécessairement un effort extérieur, ou pour mieux dire, la quantité L, par sa nature, oppose une résistance à sa diminution, mais une résistance qu'on peut vaincre.

On doit avoir égard à une semblabe circonstance, quoique Lagrange ne l'ait point considérée dans sa Mécanique; elle présente un obstacle au déplacement, non invincible à la vérité, mais toujours un obstacle qu'on ne peut pas négliger. La résistance de la quantité L à la diminition fournira un moment $\lambda\delta L$, à ajouter aux moments d'autres forces, de même que si cette quantité ne pouvait pas du tout diminuer. Mais ce dernier cas, c'est-à-dire l'impossibilité que L diminuât, exige encore, comme nous l'avons vu, l'équation $dL = 0$, laquelle actuellement, que L pourrait diminuer, n'aura pas lieu; elle sera remplacée par l'inégalité

$$dL < 0.$$

Vous aurez de même le moment $\lambda\delta L$ à ajouter aux moments d'autres forces du système, dans le cas où la quantité L ne saurait varier sans effort extérieur, c'est-à-dire ni augmenter ni

Digitized by Google

diminuer, mais pouvant céder à un effort suffisant. Dans ce cas l'équation $dL = 0$ n'aura pas lieu non plus.

Cela étant, revenons à notre objet. On sait, par la théorie des forces motrices, que la vîtesse ne peut jamais éprouver un changement tout-à-fait brusque, c'est-à-dire ne peut jamais passer tout d'un coup, d'une valeur à une autre sensiblement différente de la première. Ce qu'on appelle ordinairement un changement brusque de vîtesse, n'est qu'un changement très rapide, ou très considérable, dans un temps extrêmement court, mais jamais la vîtesse ne varie sans le temps. Cela tient à ce que les vîtesses ne changent que par des forces motrices; or les effets de ces dernières, quelle que soit leur nature, satisfont toujours à la loi de la continuité, quoique elles puissent bien elles mêmes s'affranchir de cette loi.

Cela posé, admettez qu'à la fin du temps t, il s'introduit dans le système une liaison consistant, par exemple, dans l'impossibilité de la diminution d'une quantité L. Au même instant, les forces motrices changeront brusquement, et leur moment recevra l'accroissement instantané $\lambda\delta L$. Mais si les vîtesses du système, à la fin de t, ne sont pas précisément de celles qui satisfont à l'équation $dL = 0$, cette équation n'aura pas lieu; vous aurez $dL < 0$. L'hypothèse contraire mènerait à un changement tout-à-fait brusque des vîtesses, changement qui est reconnu impossible. Nous devons en conclure, que les liens physiques par lesquels on chercherait à établir tout d'un coup un obstacle absolu à la diminution d'une quantité L, sont impossibles. Cette quantité diminuera donc jusqu'à ce que les vîtesses, variant très rapidement, satisfassent à l'équation $dL = 0$. Ce qui se fera au bout d'un temps extrêmement petit, mais dans cet intervalle de temps, quelque petit qu'il soit, les changements de vîtesse, très rapides en général, satisferont nécessairement à la loi de la continuité.

Dès que s'établira l'équation $dL = 0$, la quantité L aura atteint sa valeur minimum, et l'effet de la percussion, dû à l'introduction de la liaison $L =$ minimum, aura cessé.

La suppression d'une liaison dans le système peut aussi donner lieu à une percussion quand il y avait de très grands efforts pour violer la liaison dont il s'agit, ce qui arrivera surtout dans le cas des forces impulsives.

Remarquez en passant, que si vous considérez le mouvemement du système à partir des données initiales, il faut que ces données satisfassent aux liaisons du système, autrement, vous aurez une percussion à l'origine du mouvement.

L'équation

$$(6)\quad \frac{d\Sigma}{dt} mv \cos\omega\delta\varepsilon = \delta\frac{\Sigma mv^2}{2} + \Sigma P\cos\varphi\delta\varepsilon + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots.$$

s'appliquera à chaque instant du temps τ, supposé très petit, qui suit les changements opérés dans le système, pourvu que, parmi les forces du système, on compte celles qui viennent de s'y appliquer, et parmi les liaisons, celles qui viennent de s'y introduire, et qu'on rejette les liaisons qui ont cessé de gêner le système.

A cause que la valeur du temps τ est extrêmement petite, on peut supposer que les masses m, m', m'', m''',.... ne se déplacent qu'insensiblement pendant la durée de ce temps; et

Digitized by Google

par suite, tout ce qui dépendra de la position du système peut être regardé comme n'ayant pas varié, dans ce même intervalle de temps. Ainsi les déplacements $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,..., les angles qu'ils font avec les directions représentées par les D, munis d'accents et de numéros, les coefficients a contenus dans les différentielles δL, δL_1, δL_2, δL_3,..., ces différentielles elles mêmes peuvent être traités comme invariables de t à $t + \tau$.

Cela posé, considérons la variation

$$\frac{\delta \Sigma m v^2}{2} = \Sigma m v \delta v$$

de la force vive. Nous avons vu que

$$\delta v = \frac{d_2 (\delta\varepsilon \cos\omega)}{dt} :$$

où d_2, comme on s'en souvient sans doute, indique une différentielle par laquelle on ne doit faire varier l'angle ω, qu'en tant que varie la direction de $\delta\varepsilon$; ainsi, la différentielle $d_2 (\delta\varepsilon \cos\omega)$ ne se rapporte point à la variabilité de v, mais uniquement à celle de $\delta\varepsilon$, or le déplacement $\delta\varepsilon$ étant sensiblement invariable, nous aurons $d_2 (\delta\varepsilon \cos\omega) = 0$, c'est-à-dire $\delta v = 0$, ce qui réduit l'équation (7) à celle-ci

$$\frac{d}{dt} \Sigma m v \cos\omega \delta\varepsilon = \Sigma P \cos\varphi \delta\varepsilon + \lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \ldots\ldots$$

Remarquez bien que cette dernière serait entièrement exacte, si les $\delta\varepsilon$ ne variaient point avec le temps ni en grandeur ni en direction.

Examinons maintenant ce qui arriverait au système, si à la fin du temps t, ou au commencement de τ, toutes les liaisons et obstacles fussent supprimés, mais que les mêmes forces motrices, précisément les mêmes, continuassent d'agir pendant la durée de τ. Il est clair que la dernière équation s'appliquerait à cette hypothèse pourvu qu'on y supprime le terme

$$\lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \ldots,$$

dépendant de liaisons et d'obstacles qu'on suppose n'avoir plus lieu, et qu'on y représente les vitesses par des lettres différentes de v; mais, pour ce qui régarde la somme $\Sigma P \cos\varphi \delta\varepsilon$, elle sera commune au système réel et à l'hypothèse que nous examinons.

Ainsi, en désignant par u, u', u'', u''',..... et par σ, σ', σ'', σ''',..... les vitesses qu'auraient respectivement les masses m, m', m'', m''',...., en les supposant absolument libres de toute liaison ou obstacle, mais sollicitées par les forces P, et les angles que ces vitesses feraient respectivement avec les $\delta\varepsilon$, nous aurons

$$\frac{d}{dt} \Sigma m u \cos\sigma \delta\varepsilon = \Sigma P \cos\varphi \delta\varepsilon.$$

Remplaçant dans l'équation relative au système réel, le terme $\Sigma P \cos\varphi \delta\varepsilon$ par sa valeur précédente, il viendra

$$\frac{d}{dt} \Sigma m v \cos\omega \delta\varepsilon = \frac{d}{dt} \Sigma m u \cos\sigma + \lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Multipliant par dt, intégrant par rapport au temps depuis sa valeur t jusqu'à $t+\xi$, ξ étant un temps plus petit ou égal à τ, et faisant attention à ce que, à l'origine de ce temps, les vitesses v coïncident respectivement, en grandeur et direction, avec les vitesses u, nous aurons

$$\Sigma mv\cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu\cos\sigma\,\delta\varepsilon + \delta L\int_t^{t+\xi}\lambda dt + \delta L_1\int_t^{t+\xi}\lambda_1 dt + \delta L_2\int_t^{t+\xi}\lambda_2 dt + \ldots.$$

ou bien, en faisant pour abréger

$$\int_t^{t+\xi}\lambda dt = \nu,\quad \int_t^{t+\xi}\lambda dt = \nu_1,\quad \int_t^{t+\xi}\lambda_2 dt = \nu_2,\quad \int_t^{t+\xi}\lambda_3 dt = \nu_3,\ldots\ldots$$

$$(7)\qquad \Sigma mv\cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu\cos\sigma\,\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + \ldots..$$

C'est l'équation générale relative à la théorie de la percussion.

10. Dans la théorie des forces motrices, on suppose connue l'action la plus simple de ces forces, celle qu'elles produiraient, si elles ne variaient point, sur des masses isolées, et l'on en déduit leurs effets dans le cas le plus compliqué, quelle que soit leur nature et celle du système contre lequel elles s'exercent. De même, dans la théorie de la percussion, on doit regarder comme connus et donnés les effets les plus simples des forces impulsives, et chercher à y ramener tous les autres effets, quelles que soient les impulsions et le système qui les reçoit. Or, comme pour les forces motrices ordinaires, rien n'est plus simple pour les impulsions que leurs effets sur des points isolés, c'est donc cet effet que nous supposerons connu dans la théorie de la percussion. Il y a même à remarquer une plus grande simplicité dans cette théorie, relativement à celle des forces motrices; c'est que l'effet des forces motrices qu'on regarde comme le plus simple, est non seulement celui qui en résulterait sur une masse isolée, mais il faut encore admettre que la force même que l'on considère, ne varie point. Or une semblable hypothèse est superflue pour la percussion, n'importe que la force impulsive varie ou non, il suffit que l'on connaisse son effet total sur un point isolé, c'est-à-dire celui qu'elle produirait pendant toute la durée, supposée extrêmement petite, de son action.

Cet effet, appelé percussion, ne consiste qu'en un changement brusque, ou plutôt très rapide de la vitesse; il faut que ce changement, ou bien la vitesse totale, composée de celle qui avait lieu au commencement de l'impulsion et de celle que l'impulsion a fait acquérir, soit connue pour chaque masse du système.

Ainsi dans l'équation (7) nous pouvons considérer comme données les vitesses $u, u', u'', u''', \ldots$; elles sont les résultantes respectives des vitesses initiales qui animent le système immédiatement avant l'impulsion, et des vitesses que les forces impulsives auraient fait acquérir aux masses $m, m', m'', m''', \ldots$ dans l'hypothèse que celles-ci soient isolées, c'est-à-dire sans liaisons mutuelles ni obstacles. Il s'agit de trouver ce que deviendront les vitesses initiales, par l'effet des mêmes impulsions agissant sur les mêmes masses $m, m', m'', m''', \ldots$, mais en supposant que ces dernières forment un système assujetti à des liaisons quelconques et gêné par des obstacles extérieurs. Les vitesses dont il s'agit sont celles que les masses du système auront après la percussion; elles sont représentées par $v, v', v'', v''', \ldots$ dans les équations (2) et (7).

Digitized by Google

Nous avons déjà vu que parmi les équations (7) il peut y avoir qui ne s'établissent qu'à la fin de la percussion, ou à la fin du temps τ; par cette raison, malgré que l'équation (7) subsiste à chaque instant de τ, il serait impossible de déterminer les vitesses qu'auraient les masses m, m', m'', m''',.... avant la fin de la percussion, car quelques unes des équations (2) faisant défaut, nous n'aurons pas assez de données pour fixer les valeurs des vitesses dont il s'agit. Nous ne nous occuperons que des vitesses à la fin de la percussion, c'est-à-dire au moment où seront établies toutes les équations (2), alors en réunissant ces équations à la formule (7), où l'on fera $\xi = \tau$, on aura tout ce qui est nécessaire pour la solution complète de la question.

Si l'on voulait avoir, non les vitesses totales v, v', v'', v''',.... composées des vitesses initiales et de celles que la percussion produit, mais seulement ces dernières vitesses, les équations (2) et (7) sont également propres à les fournir. En effet, désignons par β, V et U les vitesses pour la masse m : initiale, qui précède immédiatement la percussion, celle qui est due à la seule percussion, laquelle composée avec β donnerait v et qui est l'objet de la question, et enfin celle qui serait produite par la force impulsive, agissant sur la masse m, en supposant cette dernière libre et isolée; composée avec β elle donnerait la vitesse u.

Les mêmes lettres β, V et U, convenablement accentuées, représenteront les vitesses analogues pour les autres masses m', m'', m''',.... du système.

Nous avons, par la composition des vitesses,

$$v\cos\omega = \beta\cos\gamma + V\cos\eta$$
$$u\cos\sigma = \beta\cos\gamma + U\cos\zeta;$$

les lettres γ, η et ζ désignent les angles que les vitesses β, V et U font avec $\delta\varepsilon$; des accents convenablement appliqués rapporteront les mêmes lettres aux vitesses des masses m', m'', m''',.... et aux directions de $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$,.....

En substituant dans la formule (7) les valeurs précédentes de $v\cos\omega$ et de $u\cos\sigma$, et supprimant les termes qui s'entredétruisent, nous trouverons

$$(8)\qquad \Sigma mV\cos\eta\delta\varepsilon = \Sigma mU\cos\zeta\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + ...$$

Il faut aussi remplacer dans les équations (2) les vitesses v par leurs valeurs en β et V. Prenons une de ces équations, la première par exemple, $dL = 0$ ou

$$\Sigma av\cos\alpha + T = 0$$

la lettre α y désigne l'angle que v fait avec une direction D, et comme

$$v\cos\alpha = V\cos\widetilde{DV} + \beta\cos\widetilde{D\beta},$$

il en viendra en substituant,

$$0 = \Sigma aV\cos\widetilde{DV} + \Sigma a\beta\cos\widetilde{D\beta} + T$$

Digitized by Google

ou bien, en faisant pour abréger

$$\Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi,$$
$$0 = \Sigma aV \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

Nous nous servons de la notation généralement reçue, par laquelle l'angle que font entre elles deux directions quelconques a et b, est désigné par $\widetilde{ab}$.

Toutes les équations (2), de même que la première, fournissant par les substitutions analogues, des résultats semblables, nous aurons

$$(9)\quad \begin{cases} \Sigma a V \cos \widetilde{DV} + \Pi = 0 \\ \Sigma a_1 V \cos \widetilde{D_1 V} + \Pi_1 = 0 \\ \Sigma a_2 V \cos \widetilde{D_2 V} + \Pi_2 = 0 \\ \Sigma a_3 V \cos \widetilde{D_3 V} + \Pi_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Pour abréger, on a supposé

$$(10)\quad \begin{cases} \Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi \\ \Sigma a_1\beta \cos \widetilde{D_1\beta} + T_1 = \Pi_1 \\ \Sigma a_2\beta \cos \widetilde{D_2\beta} + T_2 = \Pi_2 \\ \Sigma a_3\beta \cos \widetilde{D_3\beta} + T_3 = \Pi_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Il convient maintenant de distinguer deux espèces de liaisons : celles qui avaient lieu avant l'introduction des forces impulsives, ou avant la percussion, et qui subsistent pendant leur action, et celles qui s'établissent à la fin du temps t, c'est-à-dire au moment même où la percussion commence, et qui en sont une des causes. Si par exemple $dL = 0$, ou

$$0 = \Sigma av \cos \alpha + T = \Sigma aV \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

se rapportait à une liaison de la première espèce, la quantité Π, savoir

$$\Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T$$

serait zéro ; car les β, étant les vitesses effectives à la fin du temps t, satisferont nécessairement à l'équation

$$0 = \Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T = \Pi,$$

qui est une de celles qui déterminent ces mêmes vitesses. Mais si $dL = 0$ ou

$$0 = \Sigma av \cos \alpha + T = \Sigma aV \cos \widetilde{DV} + \Pi$$

Digitized by Google

se rapportait à une liaison établie au moment même quand la percussion commence, la quantité Π, ou

$$\Sigma a\beta \cos \widetilde{D\beta} + T,$$

ne serait pas zéro.

Ainsi l'on supprimera les quantités Π, comme égales à zéro, dans celles des équations (9) qui se rapportent aux liaisons établies avant la fin du temps t, mais on conservera ces quantités dans les équations qui répondent aux liaisons introduites au commencement, ou pendant la percussion. Nous l'avons déjà dit et nous le répéterons, que ces dernières équations ne s'établissent que vers la fin de la percussion, quand auront cessé les changements brusques des vitesses, changements produits par les liaisons qui donnent naissance à ces mêmes équations.

Les équations (8) et (9) serviront à déterminer les vitesses V dues uniquement à la percussion, c'est-à-dire qu'elles fourniront les variations brusques des vitesses, produites par les forces impulsives et le changement dans les liaisons, sans y comprendre les vitesses β antérieures à la percussion. Ces équations sont tout-à-fait semblables aux formules (7) et (2) qui renferment les vitesses totales v composées de β et de V. Nous ne nous occuperons que de ces dernières formules, et quand on en aura tiré les inconnues v, on en déduira les vitesses V par le simple changement respectif de u et T en U et Π.

11. Chaque vitesse v, pour être déterminée en grandeur et direction, demande qu'on en sache trois projections sur trois directions connues, non parallèles à un même plan; ainsi, il se représente trois inconnues par vitesse; de cette manière, n désignant le nombre des masses $m, m', m'', m''', \ldots$ donc aussi celui des vitesses $v, v', v'', v''', \ldots$, nous avons $3n$ inconnues à trouver. Mais en outre, l'équation (7) renferme d'autres inconnues, savoir les quantités ν; il y en a autant que d'équations (2). Désignant par f le nombre de ces dernières, il se présentera en tout $3n + f$ inconnues. Pour les équations qui les déterminent, nous venons d'en compter f formules (2), puis l'équation (7), renfermant les quantités arbitraires $\delta\varepsilon$, se décomposera en plusieurs équations; il s'agit d'en connaître le nombre.

En égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans les deux membres de l'équation (7), on aura n formules, puisque il y en a autant de $\delta\varepsilon$; or chacune de ces formules se rapportant à une direction absolument arbitraire, à celle de $\delta\varepsilon$ correspondant, fournira une infinité d'équations, quand on prendra successivement différentes directions à volonté pour celles de $\delta\varepsilon$. Mais il est facile de s'assurer, et on le sait d'ailleurs, que si l'on fait coïncider la direction d'un $\delta\varepsilon$, successivement avec trois directions, non parallèles à un même plan, les trois équations qui en résulteront renfermeront toutes celles qu'on obtiendra par toutes les autres hypothèses sur la direction de ce même $\delta\varepsilon$. Ainsi chacune des n formules qu'on obtiendra en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans l'équation (7), ne fournissant que trois équations distinctes, nous pouvons, au lieu de (7), compter $3n$ équations; en y ajoutant f formules (2), il y aura en tout $3n + f$ équations, c'est-à-dire autant que d'inconnues.

La détermination de ces inconnues est singulièrement facilitée par la forme des équations qui les déterminent. En effet, en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$, dans les deux mem-

Digitized by Google

bres de l'équation (7), vous exprimerez immédiatement les projections des vitesses v, sur les directions à volonté par les inconnues ν, chassez ensuite des formules (2) les projections des vitesses, en les y remplaçant par leurs valeurs en ν; et vous obtiendrez f équations qui ne renfermeront que f inconnues ν; la résolution de ces équations vous fournira les ν, puis ayant ces inconnues, vous aurez les projections des vitesses v sur les directions à volonté, donc aussi les vitesses elles mêmes, par la simple substitution des valeurs des ν dans les expressions des projections dont il s'agit. Ainsi, à proprement parler, au lieu des $3n+f$ équations qui renferment $3n+f$ inconnues, nous n'aurons que f équations à f inconnues ν à résoudre.

On obtiendra ces dernières équations encore plus facilement que nous ne venons de le dire, en s'y prenant ainsi qu'il suit.

Ecrivez les équations (2) sous cette forme très commode pour notre objet :

$$(2)\qquad \begin{cases} \Sigma a v \cos \widetilde{Dv} + T = 0 \\ \Sigma a_1 v \cos \widetilde{D_1 v} + T_1 = 0 \\ \Sigma a_2 v \cos \widetilde{D_2 v} + T_2 = 0 \\ \Sigma a_3 v \cos \widetilde{D_3 v} + T_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Puis, attribuez aux $\delta\varepsilon$ des valeurs, successives et simultanées, par lesquelles le premier membre $\Sigma mv \cos\omega\delta\varepsilon$ de la formule (7) coïncidera successivement avec chacune des f sommes Σ contenues dans les équations qu'on vient d'écrire; si, enfin, vous remplacez les Σ ainsi introduits dans la formule (7) par les T pris négativement, vous aurez f équations qui ne renfermeront que les inconnues ν et qu'il s'agissait d'obtenir.

Remarquez bien que dans la formule (7) vous pouvez attribuer aux variations $\delta\varepsilon$ des valeurs finies, car un facteur commun qui les rendrait infiniment petites, s'en irait de lui même de cette formule.

Pour faire coïncider $\Sigma mv \cos\omega\delta\varepsilon$ avec la somme $\Sigma a_k v \cos \widetilde{D_k v}$, où sont comprises toutes celles qu'on a écrites tout-à-l'heure, il n'y a qu'à attribuer aux déplacements $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \delta\varepsilon''', \ldots$ les directions respectives $D_k, D_k', D_k'', D_k''', \ldots$ et supposer que ces déplacements mêmes soient respectivement proportionnels ou même égaux, d'après la remarque qu'on vient de faire, aux quantités

$$\frac{a_k}{m}, \frac{a_k'}{m'}, \frac{a_k''}{m''}, \frac{a_k'''}{m'''}, \ldots$$

Cette hypothèse donne

$$\Sigma mv \cos\omega\delta\varepsilon = \Sigma a_k v \cos \widetilde{D_k v} = -T_k$$

$$\Sigma mu \cos\sigma\delta\varepsilon = \Sigma a_k u \cos \widetilde{D_k u}$$

$$\delta L_\theta = \frac{a_\theta a_k}{m} \cos D_\theta \widetilde{D}_k + \frac{a_\theta' a_k'}{m'} \cos D_\theta' \widetilde{D}_k' + \frac{a_\theta'' a_k''}{m''} \cos D_\theta'' \widetilde{D}_k'' + \frac{a_\theta''' a_k'''}{m'''} \cos D_\theta''' \widetilde{D}_k''' + \ldots$$

Digitized by Google

dans le cas de $i = k$

$$\delta L_k = \frac{a_k^2}{m} + \frac{a_k'^2}{m'} + \frac{a_k''^2}{m''} + \frac{a_k'''^2}{m'''} + \ldots\ldots$$

et l'équation (7), en faisant

$$(11)\quad A_{i,k} = \frac{a_i a_k}{m}\cos D_i\widetilde{D}_k + \frac{a_i' a_k'}{m'}\cos D_i'\widetilde{D}_k' + \frac{a_i'' a_k''}{m''}\cos D_i''\widetilde{D}_k'' + \frac{a_i''' a_k'''}{m'''}\cos D_i'''\widetilde{D}_k''' + \ldots.$$

ou pour abréger

$$(11)\qquad A_{i,k} = \Sigma\frac{a_i a_k}{m}\cos D_i\widetilde{D}_k,$$

$$(12)\qquad A_{k,k} = \Sigma\frac{a_k^2}{m},$$

deviendra

$$0 = T_k + \Sigma a_k u\cos\widetilde{D_k u} + A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + A_{3,k}\nu_3 + \ldots$$

ou bien, en supposant

$$(13)\qquad \Sigma a_k u\cos\widetilde{D_k u} + T_k = -X_k,$$

$$(14)\quad A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + A_{3,k}\nu_3 + \ldots A_{f-1,k}\nu_{f-1} = X_k.$$

Le n° k est susceptible de toutes les valeurs 0, 1, 2, 3,.... $f-1$, la lettre f désignant toujours le nombre des liaisons du système ou celui des quantités ν.

12. En différentiant la valeur précédente de X_k relativement à ν_i, nous aurons

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = A_{i,k}$$

et si nous eussions différentié, par rapport à ν_k, la valeur de X_i, valeur qu'on trouverait en remplaçant k par i dans l'équation (14), nous aurions eu

$$\frac{dX_i}{d\nu_k} = A_{k,i}$$

or d'après la formule (11) on a visiblement

$$A_{i,k} = A_{k,i},$$

donc

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = \frac{dX_i}{d\nu_k};$$

il en résulte que la formule

$$X d\nu + X_1 d\nu_1 + X_2 d\nu_2 + \ldots. X_{f-1}\, d\nu_{f-1},$$

est une différentielle exacte, et comme les coefficients X font fonctions homogènes des variables ν, d'une seule dimension, une intégrale de cette différentielle sera

$$\frac{X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1}}{2}.$$

Digitized by Google

En désignant par Θ l'intégrale dont il s'agit, vous aurez l'équation

$$\frac{d\Theta}{d\nu_k} = X_k \tag{14}$$

que nous marquons du n° (14) car elle revient à celle qui porte déjà ce n°. Bien entendu que les X dans Θ doivent être remplacés par leurs valeurs en ν, ν_1, ν_2, ... ν_{f-1}.

En différentiant l'équation

$$X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1} = 2\Theta \tag{15}$$

vous avez

$$Xd\nu + X_1d\nu_1 + X_2d\nu_2 + \ldots + \nu dX + \nu_1dX_1 + \nu_2dX_2 + \ldots = 2d\Theta$$

mais

$$Xd\nu + X_1d\nu_1 + X_2d\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\,d\nu_{f-1} = d\Theta$$

donc aussi

$$\nu dX + \nu_1dX_1 + \nu_2dX_2 + \ldots + \nu_{f-1}\,dX_{f-1} = d\Theta$$

et par suite, en considérant Θ comme fonction des seules quantités X, vous aurez

$$\nu_k = \frac{d\Theta}{dX_k}.$$

De cette manière, on trouverait de suite les inconnues ν, si l'on connaissait Θ en fonction des X. Mais comme la détermination dont il s'agit de Θ ne présente pas plus de facilité que la résolution des équations (14) qui déterminent les ν, nous allons procédér à cette dernière.

Désignons par Δ les déterminants des f^2 quantités

$$\begin{array}{l}
A_{0,0},\ A_{1,0},\ A_{2,0},\ A_{3,0},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,0}\\
A_{0,1},\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ A_{3,1},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,1}\\
A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ A_{3,2},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,2}\\
A_{0,3},\ A_{1,3},\ A_{2,3},\ A_{3,3},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,3}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,f-1},\ A_{1,f-1},\ A_{2,f-1},\ A_{3,f-1},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,f-1};
\end{array}$$

en changeant dans ce déterminant les coefficients

$$A_{k,0},\quad A_{k,1},\quad A_{k,2},\quad A_{k,3},\ldots\ldots\ A_{k,f-1}$$

de l'inconnue ν, dans les équations (14), respectivement en

$$X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ X_{f-1},$$

on aura la valeur du produit $\Delta\nu_k$. Or Δ étant fonction homogène d'une seule dimension des coefficients dont il s'agit, nous aurons par la propriété de cette espèce de fonctions

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}}A_{k,0} + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}}A_{k,1} + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}}A_{k,2} + \ldots\ldots\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}A_{k,f-1}$$

Digitized by Google

et comme de plus Δ est fonction entière des coefficients

$$A_{k,0},\ A_{k,1},\ A_{k,2},\ A_{k,3},\ \ldots\ldots\ldots\ A_{k,f-1}$$

les dérivées partielles de Δ, relatives à ces mêmes coefficients, n'en dépendront point, on aura donc

$$\Delta\nu_k = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}} X + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}} X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}} X_2 + \ldots\ldots\ \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}} X_{f-1}.$$

La déduction qui précède serait exacte si les quantités A étaient indépendantes entre elles, mais comme elles sont liées par la condition

$$A_{i,k} = A_{k,i},$$

à laquelle, afin de simplifier, on aura égard en formant le déterminant Δ, il s'en suit qu'en différentiant ce déterminant par rapport à une quantité $A_{i,k}$, on fera varier en même temps $A_{k,i}$, ce qu'on ne suppose point dans l'expression du produit $\Delta\nu_k$. Il faut donc pouvoir exprimer les dérivées de Δ, prises dans l'hypothèse de l'indépendance entre les coefficients A, par celles où l'on présuppose la relation

$$A_{i,k} = A_{k,i}.$$

Nous entourerons de parenthèses les dérivées relatives à la première hypothèse, afin que la notation ordinaire se rapporte à ce qui a lieu réellement; en conséquence, nous écrirons

$$\Delta\nu_k = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,0}}\right) X + \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,1}}\right) X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}} X_2 + \ldots\ldots \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}} X_{f-1}\right)$$

Nous avons d'abord évidemment

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) + \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right),$$

or on sait par le mode de composition du déterminant Δ, que les coefficients de $A_{k,i}$ et de $A_{i,k}$ dans sa valeur, ou les dérivées partielles

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} \text{ et } \frac{d\Delta}{dA_{i,k}}$$

sont les déterminants, la première des $(f-1)^2$ quantités

$$\begin{array}{llllll}
A_{0,0}, & A_{1,0}, & A_{2,0}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,0}, & A_{k+1,0}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,0} \\
A_{0,1}, & A_{1,1}, & A_{2,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,1}, & A_{k+1,1}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,1} \\
A_{0,2}, & A_{1,2}, & A_{2,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,2}, & A_{k+1,2}, \ldots\ldots\ldots & A_{f-1,2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{0,i-1}, & A_{1,i-1}, & A_{2,i-1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,i-1}, & A_{k+1,i-1}, \ldots\ldots & A_{f-1,i-1} \\
A_{0,i+1}, & A_{1,i+1}, & A_{2,i+1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,i+1}, & A_{k+1,i+1}, \ldots\ldots & A_{f-1,i+1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{0,f-1}, & A_{1,f-1}, & A_{2,f-1}, \ldots\ldots\ldots & A_{k-1,f-1}, & A_{k+1,f-1}, \ldots\ldots & A_{f-1,f-1}
\end{array}$$

et la seconde, des $(f-1)^2$ quantités

Digitized by Google

$$\begin{array}{l}
A_{0,0},\ A_{1,0},\ A_{2,0},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,0},\ A_{i+1,0},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,0}\\
A_{0,1},\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,1},\ A_{i+1,1},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,1}\\
A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,2},\ A_{i+1,2},\ \ldots\ldots\ A_{f-1,2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,k-1},\ A_{1,k-1},\ A_{2,k-1},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,k-1},\ A_{i+1,1,-1}\ \ldots\ldots\ A_{f-1,k-1}\\
A_{0,k+1},\ A_{1,k+1},\ A_{2,k+1},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,k+1},\ A_{i+1,k+1}\ \ldots\ldots\ A_{f-1,k+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,f-1},\ A_{1,f-1},\ A_{2,f-1},\ \ldots\ldots\ A_{i-1,f-1},\ A_{i+1,f-1}\ \ldots\ldots\ A_{f-1,f-1},
\end{array}$$

mais eu égard à la relation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

les deux systèmes des quantités qui précèdent, et dont sont formés les deux déterminants dont il s'agit, se trouvent être identiques; chaque série horizontale de la première étant remplacée par la colonne verticale correspondante de la seconde. Ainsi par exemple la troisième série

$$A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ \ldots\ A_{k-1,2},\ A_{k+1,2},\ \ldots\ A_{f-1,2}$$

du premier système, et la troisième colonne verticale

$$A_{2,0},\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ \ldots\ A_{2,k-1},\ A_{2,k+1},\ \ldots\ A_{2,f-1}$$

du second, en transportant les indices d'après l'équation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

deviendront identiques; et comme il est facile de s'assurer de plus, que les termes égaux de deux déterminants sont affectés des mêmes signes dans la valeur de Δ, il s'ensuivra visiblement que les déterminants en question, ou les dérivées partielles

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) \text{ et } \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right),$$

sont égales entre elles, et par suite

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) = \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}.$$

Mais il faut en excepter le cas de l'égalité des indices i et k, pour lequel on aura

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,k}}\right) = \frac{d\Delta}{dA_{k,k}},$$

car dans ce cas, l'équation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

par sa nature, ne fournira aucune relation, et par suite elle sera sans influence sur la dérivée de Δ par rapport à $A_{k,k}$. Ainsi nous aurons, Δ étant simplifié par la relation

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

$$(16)\quad 2\Delta\nu_k = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}}\,X + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}}\,X_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}}\,X_2 + \ldots\ldots 2\,\frac{d\Delta}{dA_{k,k}}\,X_k + \ldots\ldots + \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}\,X_{f-1}$$

Digitized by Google

En donnant à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3, ... $f-1$, vous aurez tous les ν, et par suite vous trouverez

$$X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1}$$

ou 2Θ, vous aurez

$$(17)\quad \Theta = \frac{1}{2\Delta}\left\{\begin{array}{l} \frac{d\Delta}{dA_{0,0}}X^2 + \frac{d\Delta}{dA_{1,1}}X_1^2 + \frac{d\Delta}{dA_{2,2}}X_2^2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{f-1,f-1}}X_{f-1}^2 \\ + \frac{d\Delta}{dA_{0,1}}XX_1 + \frac{d\Delta}{dA_{0,2}}X_{0,2} + \frac{d\Delta}{dA_{1,2}}X_1X_2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{i,k}}X_iX_k \end{array}\right\}$$

cela étant, l'équation (7) deviendra

$$(18)\quad \Sigma mv\cos\omega\,\delta\varepsilon = \Sigma mu\cos\sigma\,\delta\varepsilon + \frac{d\Theta}{dX}\delta L + \frac{d\Theta}{dX_1}\delta L_1 + \frac{d\Theta}{dX_2}\delta L_2 + \ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\delta L_{f-1}$$

Sous cette forme elle ne renferme d'inconnues que les v, dont elle fournira de suite les valeurs. En effet, en égalant entre eux les coefficients des $\delta\varepsilon$ dans les deux membres de l'équation, on trouvera les formules

$$(19)\left\{\begin{array}{l} mv\cos\omega = mu\cos\sigma + a\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta + a_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1 + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2 + \ldots. \\ \qquad + a_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta_{f-1} \\ m'v'\cos\omega' = m'u'\cos\sigma' + a'\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta' + a_1'\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2' + \ldots. \\ \qquad + a'_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta'_{f-1} \\ m''v''\cos\omega = m''u''\cos\sigma'' + a''\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta'' + a_1''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1'' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2'' + \ldots. \\ \qquad + a''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta''_{f-1} \\ m'''v'''\cos\omega''' = m'''u'''\cos\sigma''' + a'''\frac{d\Theta}{dX}\cos\theta''' + a_1'''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\theta_1''' + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\theta_2''' + \ldots. \\ \qquad + a'''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\theta'''_{f-1}. \end{array}\right.$$

.....

qui fourniront non seulement les quantités du mouvement cherchées mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$,.... mais aussi leurs projections sur des directions quelconques, ce qui présente une solution complète de la question.

Il est à remarquer dans les valeurs précédentes des projections

$$mv\cos\omega,\ m'v'\cos\omega',\ m''v''\cos\omega'',\ m'''v'''\cos\omega''',\ldots..$$

que les forces impulsives, ainsi que les liaisons du système, y fournissent les termes de même forme, que si chacune de ces causes agissait seule indépendamment des autres; mais nous ne parlons que de la forme, et non de la valeur des termes dont il s'agit, ces dernières dépendent de l'action simultanée de toutes les causes.

Nous allons terminer le mémoire par quelques remarques relatives à la force vive après la percussion, et par quelques relations entre les quantités qui intéressent la question.

Digitized by Google

13. Supposons que les directions arbitraires, auxquelles se rapportent tous les angles dans les équations (19), coïncident respectivement avec celles des vitesses v, v', v'', v''',... nous aurons pour les quantités du mouvement mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$,.... les valeurs suivantes

$$mv = mu\cos\widetilde{uv} + a\frac{d\Theta}{dX}\cos\widetilde{Dv} + a_1\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widetilde{D_1v} + a_2\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widetilde{D_2v} + \ldots + a_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widetilde{D_{f-1}v}$$

$$m'v' = m'u'\cos\widetilde{u'v'} + a'\frac{d\Theta}{dX}\cos\widetilde{D'v'} + a_1'\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widetilde{D_1'v'} + a_2'\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widetilde{D_2'v'} + \ldots + a'_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widetilde{D'_{f-1}v'}$$

$$m''v'' = m''u''\cos\widetilde{u''v''} + a''\frac{d\Theta}{dX}\cos\widetilde{D''v''} + a_1''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widetilde{D_1''v''} + a_2''\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widetilde{D_2''v''} + \ldots + a''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widetilde{D''_{f-1}v''}$$

$$m'''v''' = m'''u'''\cos\widetilde{u'''v'''} + a'''\frac{d\Theta}{dX}\cos\widetilde{D'''v'''} + a_1'''\frac{d\Theta}{dX_1}\cos\widetilde{D_1'''v'''} + a_2'''\frac{d\Theta}{dX_2}\cos\widetilde{D_2'''v'''} + \ldots + a'''_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\cos\widetilde{D'''_{f-1}v'''}$$

.....

En multipliant les équations respectivement par v, v', v'', v''',... et ajoutant ensemble, il viendra

$$\Sigma mv^2 = \Sigma muv\cos\widetilde{uv} + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma av\cos\widetilde{Dv} + \frac{d\Theta}{dX_1}\Sigma a_1v\cos\widetilde{D_1v} + \frac{d\Theta}{dX_2}\Sigma a_2v\cos\widetilde{D_2v} + \ldots\ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\Sigma a_{f-1}v\cos\widetilde{D_{f-1}v}$$

ou bien, en remplaçant les sommes

$$\Sigma av\cos\widetilde{Dv},\ \Sigma a_1v\cos\widetilde{D_1v},\ \Sigma a_2v\cos\widetilde{D_2v},\ldots.\ \Sigma a_{f-1}v\cos\widetilde{D_{f-1}v}$$

par leurs valeurs fournies par les équations (2), et faisant pour abréger

$$(20)\qquad \Phi = T\frac{d\Theta}{dX} + T_1\frac{d\Theta}{dX_1} + T_2\frac{d\Theta}{dX_2} + \ldots. + T_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}},$$

$$(21)\qquad \Sigma mv^2 = \Sigma muv\cos\widetilde{uv} - \Phi$$

Cette dernière équation résulterait sur le champ de la formule (18) en y faisant coïncider, en grandeurs et en directions, les $\delta\varepsilon$ respectivement avec vdt. La même formule (18), en y faisant coïncider les $\delta\varepsilon$ en grandeurs et directions respectivement avec udt, nous donnera

$$\Sigma muv\cos\widetilde{uv} = \Sigma mu^2 + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma au\cos\widetilde{Du} + \frac{d\Theta}{dX_1}\Sigma a_1u\cos\widetilde{D_1u} + \frac{d\Theta}{dX}\Sigma a_2u\cos\widetilde{D_2u} + \ldots\ldots + \frac{d\Theta}{dX_{f-1}}\Sigma a_{f-1}u\cos\widetilde{D_{f-1}u}$$

ou bien, remplaçant les sommes

Digitized by Google

$$\Sigma au \cos \widetilde{Du},\quad \Sigma a_1 u \cos \widetilde{D_1 u},\quad \Sigma a_2 u \cos \widetilde{D_2 u},\quad \ldots.\quad \Sigma a_{f-1} u \cos \widetilde{D_{f-1} u}$$

par leurs valeurs que fournissent les équations (13),

$$\Sigma muv \cos \widetilde{uv} = \Sigma mu^2 - 2\Theta - \Phi.$$

Les équations (21) et (22) donnent

$$\Phi = \Sigma mv\,(u \cos \widetilde{uv} - v)$$
$$2\Theta + \Phi = \Sigma mu\,(u - v \cos \widetilde{uv})$$
$$\Theta + \Phi = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2}\Sigma m\,(u^2 + v^2 - 2uv \cos \widetilde{uv})$$

Décomposons la vitesse u en deux vitesses, dont l'une soit v, et l'autre nous la désignerons par w, nous aurons par la composition des vitesses.

$$u \cos \widetilde{uv} - v = w \cos \widetilde{vw}$$
$$u - v \cos \widetilde{uv} = w \cos \widetilde{uw}$$
$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \widetilde{uv} = w^2$$

et par suite

$$(23)\qquad \begin{cases} \Phi = \Sigma mvw \cos \widetilde{vw} \\ 2\Theta + \Phi = \Sigma muw \cos \widetilde{uw} \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} \Theta + \Phi = \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 \\ \Theta = \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2 \end{cases}$$

Remarquez bien que s'il n'y avait pas de liaisons entre les points du système, la vitesse de la masse m à la fin de la percussion serait u, ou ce qui revient au même, le point m aurait deux vitesses simultanées v et w, or réellement il n'en reste que la première, donc par les liaisons du système m, perd la vitesse w, par cette raison cette vitesse porte le nom de *vitesse perdue*. Or la dernière des équations (24) nous montre que la quantité Θ, qui joue un si grand rôle dans la théorie de la percussion, n'est autre chose que la force vive du système, due aux vitesses perdues. Et nous voyons, par la première de ces mêmes équations, que $\Theta + \Phi$ représente la force vive perdue par le système à cause des liaisons, car sans les liaisons le système aurait pour force vive $\frac{1}{2}\Sigma mu^2$, et comme il ne lui en reste que $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ la différence

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2,$$

ou la quantité $\Theta + \Phi$ qui lui est égale, représentera visiblement la force vive perdue. Ainsi cette force et la force vive due aux vitesses perdues, exprimée comme on vient de le voir par la seule quantité Θ, diffèrent entre elles par la quantite Φ. Elles seraient donc égales entre elles

Digitized by Google

dans le cas particulier où Φ disparaîtrait; ce qui arriverait si les conditions des déplacements possibles ne renfermaient pas les termes Tdt, proportionnels à l'élément du temps; car tous les T étant zéro, il est visible par l'équation

$$(21) \qquad \Phi = T\frac{d\Theta}{dX} + T_1\frac{d\Theta}{dX_1} + T_2\frac{d\Theta}{dX_2} + \ldots + T_{f-1}\frac{d\Theta}{dX_{f-1}}$$

que Φ le sera aussi. Dans ce cas particulier la force vive perdue et la force vive due aux vîtesses perdues, auront une valeur commune Θ.

Dans le cas de $\Phi = 0$ l'équation (22), en y remplaçant Θ par $\frac{1}{2}\Sigma mw^2$, deviendra

$$(25) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma mu^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2.$$

L'égalité précédente entre les deux espèces des forces vives renferme, comme un cas particulier, le célèbre théorème de Carnot sur la perte des forces vives dans le choc des corps durs. En effet, vous comprendrez le cas du choc de ces corps, en admettant qu'il n'y ait point de forces impulsives, et que la percussion vient uniquement du changement dans les liaisons du système; car le choc dont il s'agit n'arrive que par l'établissement subit des liaisons entre les corps au moment où ils commencent à se toucher. L'absence des forces impulsives réduira les vîtesses u à celles qui avaient lieu avant la percussion ou le choc, et que nous avons désignées par les β. Cela étant, la dernière équation deviendra

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\beta^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma mw^2.$$

On en conclura que dans le choc des corps durs, il se fait une perte de force vive, égale à la force vive que l'ensemble de ces mêmes corps aurait, si chacun était animé de la vîtesse qu'il a perdue par le choc : c'est en quoi consiste le théorème de Carnot.

14. Par une analyse tout-à-fait semblable à celle qui précède nous pouvons comparer la percussion que notre système éprouve à celle qu'il éprouverait s'il était délivré, non de toutes, mais d'une partie des liaisons qui le gênent. Nous allons dire quelques mots sur cet important objet.

Supposons que les liaisons dont les expressions algébriques dépendent des quantités L_g, L_{g+1},... L_{f-g} soient supprimées, mais que les autres liaisons, auxquelles répondent les quantités L, L_1, L_2,... L_{g-1} demeurent, et désignons par V, Ω et μ, pour le système ainsi libéré, ce que v, ω et ν représentent respectivement pour le système chargé de la totalité des liaisons. La lettre g est un entier plus petit que f. Nous aurons

$$\Sigma mV\cos\Omega\delta\varepsilon = \Sigma mu\cos\sigma\delta\varepsilon + \mu\delta L + \mu_1\delta L_1 + \mu_2\delta L_2 + \ldots \mu_{g-1}\delta L_{g-1},$$

retranchant cette équation de la formule (7) il vient

$$\Sigma mv\cos\omega\delta\varepsilon =$$

$$\Sigma mV\cos\Omega\delta\varepsilon + (\nu-\mu)\delta L + (\nu_1-\mu_1)\delta L_1 + (\nu_2-\mu_2)\delta L_2 + \ldots\ldots + (\nu_{g-1}-\mu_{g-1})\delta L_{g-1}$$
$$+ \nu_g\delta L_g + \nu_{g+1}\delta L_{g+1} + \nu_{g+2}\delta L_{g+2} + \ldots\ldots + \nu_{f-1}\delta L_{f-1}$$

Digitized by Google

Cette relation, tout à fait semblable à la formule (7), peut être traitée comme l'a été cette dernière; nous allons en tirer quelques conséquences.

Faisons coïncider les $\delta\varepsilon$, en grandeurs et directions, d'abord avec vdt, puis avec Vdt, nous aurons, en supposant pour abréger

$$\mu T + \mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \ldots\ldots + \mu_{g-1} T_{g-1} = \Phi'$$

et en supprimant le facteur commun dt,

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mvV\cos\widetilde{vV} - \Phi + \Phi'$$

$\Sigma mvV\cos\widetilde{vV} =$

$$\Sigma mV^2 + (\nu-\mu)\Sigma aV\cos\widetilde{DV} + (\nu_1-g_1)\Sigma a_1 V\cos\widetilde{D_1 V} + \ldots\ldots (\nu_{g-1}-\mu_{g-1})\Sigma a_{g-1} V\cos\widetilde{D_{g-1}V}$$
$$+ \nu_g \Sigma a_g V\cos\widetilde{D_g V} + \nu_{g+1}\Sigma a_{g+1} V\cos\widetilde{D_{g+1}V} + \ldots\ldots \nu_{f-1}\Sigma a_{f-1} V\cos\widetilde{D_{f-1}V}.$$

Or les vitesses V satisfaisant aux g premières des équations (2), nous pouvons remplacer les sommes

$$\Sigma aV\cos\widetilde{DV},\ \Sigma a_1 V\cos\widetilde{D_1 V},\ \Sigma a_2 V\cos\widetilde{D_2 V},\ \ldots\ \Sigma a_{g-1} V\cos\widetilde{D_{g-1}V}$$

respectivement par

$$-T,\ -T_1,\ -T_2,\ \ldots\ -T_{g-1}$$

et si, de plus, on suppose

$$\begin{aligned}
\Sigma a_g V\cos\widetilde{D_g V} + T_g &= -Y_g\\
\Sigma a_{g+1} V\cos\widetilde{D_{g+1}V} + T_{g+1} &= -Y_{g+1}\\
\Sigma a_{g+1} V\cos\widetilde{D_{g+2}V} + T_{g+2} &= -Y_{g+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma a_{f-1} V\cos\widetilde{D_{f-1}V} + T_{f-1} &= -Y_{f-1}
\end{aligned}$$

et qu'on fasse pour abréger

$$\nu_g Y_g + \nu_{g+1} Y_{g+1} + \nu_{g+2} Y_{g+2} + \ldots\ldots + \nu_{f-1} Y_{f-1} = 2\Theta'$$

on réduira la dernière équation à celle-ci

$$\Sigma mvV\cos\widetilde{vV} = \Sigma mV^2 - 2\Theta' - \Phi + \Phi'.$$

Les équations

$$(26)\qquad \begin{cases} \Sigma mv^2 = \Sigma mvV\cos\widetilde{vV} - \Phi + \Phi' \\ \Sigma mvV\cos\widetilde{vV} = \Sigma mV^2 - 2\Theta - \Phi + \Phi' \end{cases}$$

ont la même forme que les équations (17) et (18) et l'on en déduira des conclusions semblables. En les ajoutant, on aura la différence des forces vives

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \Theta' + \Phi - \Phi',$$

et en retranchant l'une de l'autre il vient

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\,(V^2 + v^2 - 2vV\cos\widetilde{vV}) = \Theta'.$$

Or si l'on décompose la vitesse V en v et une autre composante w, on aura

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2vV\cos\widetilde{vV}$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m w^2 = \Theta' \tag{27}$$

et

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m w^2 + \Phi - \Phi'. \tag{28}$$

Les vitesses w sont visiblement celles que perdent les points du système aux vitesses v, relativement aux points du système aux vitesses V, à cause de ces obstacles qui gênent le premier des deux systèmes et qui laissent libre le second. Ainsi l'équation (27) donne la force vive due aux vitesses perdues, et l'équation (28) fournit la différence qu'il y a entre la force vive perdue, représentée par

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2$$

et la force vive $\frac{1}{2}\Sigma m w^2$ due aux vitesses perdues. La différence dont il s'agit disparaîtrait dans le cas particulier, quand les conditions des déplacements possibles ne renfermeraient pas les termes Tdt proportionnels à l'élément dt du temps, car alors les quantités Φ et Θ seraient zéro toutes les deux, et par suite il viendrait

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m V^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m w^2.$$

On en conclura, en se bornant sans doute au cas particulier dont il est question, celui où les T sont zéro, que l'addition des nouvelles liaisons diminue la force vive du système d'une quantité égale à la force vive que le système aurait, si chaque point était animé de la vitesse que ce même point perdrait par l'addition des nouvelles liaisons dont il s'agit. On voit aussi réciproquement que le système par la suppression de quelques liaisons recevrait une augmentation de force vive, égale à la force vive qu'il aurait, si chaque point était animé de la vitesse qu'il gagnerait par la suppression des liaisons en question.

On pourrait généraliser les considérations précédentes, en comparant l'effet des forces impulsives, sur un système de points assujettis à des liaisons quelconques, avec l'effet des mêmes forces sur les mêmes points, mais gênés par d'autres liaisons également arbitraires. Cependant nous ne nous occuperons point de cette comparaison car, d'après ce qui précède, elle ne présentera aucune difficulté.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google